MATHEMATISCHE ZEITSCHRIFT.

UNIVERSITY OF HAWAII
LIBRARY

UNTER STÄNDIGER MITWIRKUNG
VON

K. KNOPP
KÖNIGSBERG

E. SCHMIDT
BERLIN

I. SCHUR
BERLIN

HERAUSGEGEBEN
VON

L. LICHTENSTEIN
MÜNSTER

WISSENSCHAFTLICHER BEIRAT:

W. BLASCHKE L. FEJÉR E. HECKE G. HERGLOTZ A. KNESER
E. LANDAU O. PERRON F. SCHUR E. STUDY H. WEYL

12. BAND 1./2. HEFT

(AUSGEGEBEN AM 19. JANUAR 1922)

QA1
M88
v.12-15

BERLIN
VERLAG VON JULIUS SPRINGER
1922

Über eine Randwertaufgabe der Theorie gewöhnlicher linearer Differentialgleichungen zweiter Ordnung.

Von

Hilda Geiringer in Berlin.

Die Existenz von Eigenwerten gewöhnlicher linearer und partieller Differentialgleichungen zweiter Ordnung sowie das Problem der Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Eigenfunktionen solcher wird seit Hilbert meist mittels der Theorie der Integralgleichungen behandelt. Herr Lichtenstein hat in zwei Arbeiten[1]) gezeigt, wie sich diese Probleme ohne Zurückführung auf Integralgleichungen mittels der Hilbertschen Theorie vollstetiger quadratischer Formen von unendlich vielen Variablen behandeln lassen. Die neue Behandlungsweise führt nicht unerheblich weiter als die frühere.

In der vorliegenden Arbeit werden nun *Systeme* von Differentialgleichungen behandelt (der Einfachheit halber werden die Rechnungen nur für zwei Gleichungen durchgeführt, doch gestalten sie sich im Falle von n Gleichungen analog), und zwar in Verfolgung des von Herrn Lichtenstein eingeschlagenen Weges mittels der Methode der unendlich vielen Variablen.

Wir betrachten das sich selbst adjungierte System von zwei gewöhnlichen Differentialgleichungen zweiter Ordnung

$$\frac{d}{dx}\left(p_1\frac{du_1}{dx}+p_2\frac{du_2}{dx}\right)+l\frac{du_2}{dx}+q_1u_1+\left(q_2+\frac{1}{2}\frac{dl}{dx}\right)u_2=h_1,$$

$$\frac{d}{dx}\left(p_2\frac{du_1}{dx}+p_3\frac{du_2}{dx}\right)-l\frac{du_1}{dx}+\left(q_2-\frac{1}{2}\frac{dl}{dx}\right)u_1+q_3u_2=h_2,$$

und erweitern dies System mit Hilfe eines Parameters λ zu dem folgenden:

$$\frac{d}{dx}\left(p_1\frac{du_1}{dx}+p_2\frac{du_2}{dx}\right)+l\frac{du_2}{dx}+(q_1+\lambda k_1)u_1+\left(q_2+\frac{1}{2}\frac{dl}{dx}+\lambda k_2\right)u_2=h_1,$$

$$\frac{d}{dx}\left(p_2\frac{du_1}{dx}+p_3\frac{du_2}{dx}\right)-l\frac{du_1}{dx}+\left(q_2-\frac{1}{2}\frac{dl}{dx}+\lambda k_2\right)u_1+(q_3+\lambda k_3)u_2=h_2,$$

[1]) Vgl. L. Lichtenstein, Zur Analysis der unendlichvielen Variablen. Rend. di Pal. **38** (1914), S. 113–166, sowie Mathem. Zeitschr. **3** (1919), S. 127–160.

wobei die q_i, k_i $(i = 1, 2, 3)$, h_1, h_2 beliebige reelle in $(0\,\pi)$ stetige Funktionen sind; l sei stetig differenzierbar; λ ein reeller Parameter. Bezüglich der p wird etwas mehr vorausgesetzt werden.

Den u_1, u_2 kann man verschiedene Randbedingungen auferlegen. Die einfachste ist wohl die, wobei $u_1(0) = u_2(0) = u_1(\pi) = u_2(\pi) = 0$. Doch könnte man den Überlegungen auch kompliziertere Randbedingungen — etwa die Sturm-Liouvilleschen oder Kombinationen verschiedener Randbedingungen für die verschiedenen Endpunkte und verschiedenen Funktionen — zugrunde legen. Hier ist der einfachste Fall behandelt. Die anderen ließen sich unter geeigneten Modifikationen ähnlich behandeln [2].

Solche Systeme von zwei Differentialgleichungen treten in der mathematischen Physik sehr häufig auf und sind bis jetzt selten behandelt. Hilbert hat in seiner fünften Mitteilung zur Theorie der Integralgleichungen [3] unser Problem formuliert und dort einen Weg zu seiner Lösung sowie die wichtigsten Resultate (die Entwicklungssätze) mit Hilfe seiner Theorie der Integralgleichungen angegeben. In der vorliegenden Arbeit werden die dort gemachten Voraussetzungen durch Anwendung der direkten Methode der unendlich vielen Variablen wesentlich erweitert. Die k_i $(i = 1, 2, 3)$ werden als *schlechthin stetig* vorausgesetzt; die willkürlichen zu entwickelnden Funktionen f_1, f_2 müssen nur noch *quadratisch integrable Ableitungen* haben. All dies entspricht den in der eingangs zitierten Arbeit von Herrn Lichtenstein erzielten Resultaten.

Die in dieser Arbeit behandelten Probleme ließen sich unter Heranziehung der in der zweiten Abhandlung von Herrn Lichtenstein ausgearbeiteten Methoden auch bei entsprechenden partiellen Differentialgleichungen durchführen.

1. Zurückführung auf ein System von unendlich vielen linearen Gleichungen. Es seien $q_1(x)$, $q_2(x)$, $q_3(x)$; $k_1(x)$, $k_2(x)$, $k_3(x)$ wie in der Einleitung beliebige reelle in $(0\,\pi)$ stetige Funktionen, λ ein reeller Parameter.

Wir suchen diejenigen in $(0\,\pi)$ nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen Lösungen der Differentialgleichungen

$$\begin{aligned} &\frac{d^2 u_1}{dx^2} + (q_1 + \lambda k_1)\, u_1 + (q_2 + \lambda k_2)\, u_2 = h_1, \\ &\frac{d^2 u_2}{dx^2} + (q_2 + \lambda k_2)\, u_1 + (q_3 + \lambda k_3)\, u_2 = h_2 \end{aligned} \tag{1}$$

zu bestimmen, die für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwinden.

[2] Vgl. die an erster Stelle genannte Arbeit von Herrn Lichtenstein, in der drei verschiedene Randbedingungen behandelt werden.

[3] Vgl. Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Teubner 1912, S. 206.

Der allgemeinere Fall des Systems

$$\left.\begin{aligned}\frac{d}{dx}\left(p_1\frac{du_1}{dx}+p_2\frac{du_2}{dx}\right)+l\frac{du_2}{dx}+(q_1+\lambda k_1)u_1+\left(q_2+\frac{1}{2}\frac{dl}{dx}+\lambda k_2\right)u_2=h_1,\\ \frac{d}{dx}\left(p_2\frac{du_1}{dx}+p_3\frac{du_2}{dx}\right)-l\frac{du_1}{dx}+\left(q_2-\frac{1}{2}\frac{dl}{dx}+\lambda k_2\right)u_1+(q_3+\lambda k_3)u_2=h_2,\end{aligned}\right)$$

wo unter p_1, p_2, p_3 stetige, mit stetigen Ableitungen erster und zweiter Ordnung versehene Funktionen verstanden werden, deren Determinante

$$p_1 p_3 - p_2^2$$

für keinen Wert von x in $(0\,\pi)$ verschwinden soll, läßt sich, wie in **5.** gezeigt wird, ähnlich behandeln.

Es seien nun $v_1(x)$ und $v_2(x)$ zwei willkürliche, nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung in $(0\,\pi)$ stetige, für $x=0$ und $x=\pi$ verschwindende Funktionen. Für das eingangs gestellte Problem substituieren wir das folgende ihm äquivalente:

Es sind diejenigen in $(0\,\pi)$ nebst ihren Ableitungen erster und zweiter Ordnung stetigen, für $x=0$ und $x=\pi$ verschwindenden Funktionen u_1 und u_2 zu bestimmen, die dem Gleichungssysteme genügen:

$$(3)\qquad \left.\begin{aligned}\int_0^\pi\left[\frac{du_1}{dx}\frac{dv_1}{dx}-(q_1+\lambda k_1)u_1v_1-(q_2+\lambda k_2)u_2v_1+h_1v_1\right]dx=0,\\ \int_0^\pi\left[\frac{du_2}{dx}\frac{dv_2}{dx}-(q_2+\lambda k_2)u_1v_2-(q_3+\lambda k_3)u_2v_2+h_2v_2\right]dx=0.\end{aligned}\right.$$

Wir setzen

$$(4)\qquad u_1=\sum_m^{1\ldots}x_m\sin mx,\qquad u_2=\sum_m^{1\ldots\infty}z_m\sin mx,$$

$$(5)\qquad v_1=\sum_m^{1\ldots\infty}y_m\sin mx,\qquad v_2=\sum_m^{1\ldots\infty}t_m\sin mx.$$

Die unendlichen Reihen rechts sind unbedingt und gleichmäßig konvergent; es ist ferner

$$(6)\qquad \frac{du_1}{dx}=\sum^{1\ldots\infty}mx_m\cos mx,\qquad \frac{dv_1}{dx}=\sum^{1\ldots\infty}my_m\cos mx,\ldots$$

Auch diese Reihen konvergieren unbedingt und gleichmäßig.

Wir wollen nun die einzelnen Summanden des Systems (3) berechnen. Es ist

$$\int_0^\pi\frac{du_1}{dx}\frac{dv_1}{dx}\,dx=\frac{\pi}{2}\sum_m m^2x_my_m,$$

$$(7) \qquad \int_0^\pi q_1(x)\,u_1(x)\,v_1(x)\,dx = \sum_{m,n} x_m\,y_n \int_0^\pi q_1(s)\sin ms\sin ns\,ds\,,$$

. . . . . .

Setzt man nun, genau wie in der zitierten Arbeit des Herrn Lichtenstein,

$$(8) \qquad m x_m = X_m\,, \quad m z_m = Z_m\,, \quad m y_m = Y_m\,, \quad m t_m = T_m\,,$$

so ergibt sich

$$\begin{aligned}
&\sum_m X_m Y_m - \frac{2}{\pi}\sum_{m,n}{}' \frac{X_m Y_n}{mn}\int_0^\pi q_1(s)\sin ms\sin ns\,ds \\
&\quad - \frac{2}{\pi}\sum_{m,n}{}' \frac{Z_m Y_n}{mn}\int_0^\pi q_2(s)\sin ms\sin ns\,ds \\
&\quad - \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{m,n}{}' \frac{X_m Y_n}{mn}\int_0^\pi k_1(s)\sin ms\sin ns\,ds \\
&\quad - \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{m,n}{}' \frac{Z_m Y_n}{mn}\int_0^\pi k_2(s)\sin ms\sin ns\,ds \\
&\quad + \frac{2}{\pi}\sum_n{}' \frac{Y_n}{n}\int_0^\pi h_1(s)\sin ns\,ds = 0\,, \\
(9)\qquad &\\
&\sum_m{}' Z_m T_m - \frac{2}{\pi}\sum_{m,n}{}' \frac{X_m T_n}{mn}\int_0^\pi q_2(s)\sin ms\sin ns\,ds \\
&\quad - \frac{2}{\pi}\sum_{m,n}{}' \frac{Z_m T_n}{mn}\int_0^\pi q_3(s)\sin ms\sin ns\,ds \\
&\quad - \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{m,n}{}' \frac{X_m T_n}{mn}\int_0^\pi k_2(s)\sin ms\sin ns\,ds \\
&\quad - \lambda\frac{2}{\pi}\sum_{m,n}{}' \frac{Z_m T_n}{mn}\int_0^\pi k_3(s)\sin ms\sin ns\,ds \\
&\quad + \frac{2}{\pi}\sum_n{}' \frac{T_n}{n}\int_0^\pi h_2(s)\sin ns\,ds = 0\,.
\end{aligned}$$

Die Linearformen

$$(10) \qquad M_1(Y) = -\frac{2}{\pi}\sum_n{}' \frac{Y_n}{n}\int_0^\pi h_1(s)\sin ns\,ds$$

und

$$M_2(T) = -\frac{2}{\pi}\sum_n \frac{T_n}{n}\int_0^\pi h_2(s)\sin ns\,ds$$

sind beschränkt, demnach auch vollstetig; die Bilinearform

$$(11)\qquad Q_1(X,Y) = \frac{2}{\pi}\sum_{m,n}\frac{X_m Y_n}{mn}\int_0^\pi q_1(s)\sin ms\sin ns\,ds$$

und die hierzu analogen Formen

$$Q_2(X,T),\quad Q_2(Z,Y),\quad Q_3(Z,T)$$

einerseits, die Formen

$$(12)\qquad K_1(X,Y) = \frac{2}{\pi}\sum_{m,n}\int_0^\pi k_1(s)\sin ms\sin ns\,ds$$

und analog

$$K_2(X,T),\quad K_2(Z,Y),\quad K_3(Z,T)$$

andererseits sind symmetrisch und vollstetig. Aus (9), (10), (11), (12) folgt

$$(13)\qquad \begin{cases} (X,Y) - Q_1(X,Y) - Q_2(Z,Y) - \lambda[K_1(X,Y) + K_2(Z,Y)] = M_1(Y), \\ (Z,T) - Q_2(X,T) - Q_3(Z,T) - \lambda[K_2(X,T) + K_3(Z,T)] = M_2(T). \end{cases}$$

Wir denken uns nun die X_m und die Z_m irgendwie in *eine* einfach unendliche Folge geordnet, merken uns aber die Anordnung. Das Gleiche gilt für die Y_n und die T_n. Wir bezeichnen symbolisch

$$(14)\qquad \begin{cases} Q_1(X,Y) + Q_2(Z,Y) + Q_2(X,T) + Q_3(Z,T) = Q(X\dot{+}Z, Y\dot{+}T), \\ K_1(X,Y) + K_2(Z,Y) + K_2(X,T) + K_3(Z,T) = K(X\dot{+}Z, Y\dot{+}T) \end{cases}$$

und analog

$$(14')\qquad (X,Y) + (Z,T) = (X\dot{+}Z, Y\dot{+}T),\quad M_1(Y) + M_2(T) = M(Y\dot{+}T);$$

dann haben wir die *eine* Relation

$$(15)\qquad (X\dot{+}Z, Y\dot{+}T) - Q(X\dot{+}Z, Y\dot{+}T) - \lambda K(X\dot{+}Z, Y\dot{+}T) = M(Y\dot{+}T).$$

Diese Beziehung gilt für alle Y_m und T_m mit konvergenter Quadratsumme. Der Formel (15) entspringen unendlich viele lineare Gleichungen, deren Unbekannte eben die in eine einfach unendliche Reihe geordneten X_m und Z_m sind, die wir auch als $X\dot{+}Z$ bezeichnen. Diese Gleichungen gehören dem von Hilbert behandelten Typus an[4]).

[4]) Vgl. D. Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. IV. Mitteilung, Göttinger Nachrichten 1906, S. 219—223.

Es seien jetzt $X_1, X_2, \ldots, Z_1, Z_2, \ldots$ die Lösungen der vorerwähnten nichthomogenen Gleichungen oder ein System der Lösungen der zugehörigen homogenen Gleichungen. Die unendliche Reihe

$$\sum_m (X_m^2 + Z_m^2) = \sum m^2 (x_m^2 + z_m^2)$$

konvergiert. Wie bei *einer* Differentialgleichung läßt sich beweisen, daß auch die Reihe

$$\sum_m m^2 (X_m^2 + Z_m^2) = \sum_m m^4 (x_m^2 + z_m^2)$$

konvergiert, daher die Funktionen

$$u_1(x) = \sum_m \frac{X_m}{m} \sin m x; \quad u_2(x) = \sum_m \frac{Z_m}{m} \sin m x \tag{16}$$

gewiß stetige Ableitungen erster Ordnung haben und, wie man leicht sieht, entweder den Beziehungen (3) oder den zugehörigen homogenen Beziehungen genügen[5]). Hieraus ergibt sich dann, daß $u_1(x), u_2(x)$ stetige Ableitungen zweiter Ordnung haben und entweder dem Systeme (1) oder dem zugehörigen homogenen Systeme genügen.

2. Eigenwerte und Eigenfunktionen. Wir wenden uns jetzt der Untersuchung der Eigenwerte und Eigenfunktionen zu und betrachten zunächst den einfachen Fall

$$\begin{cases} \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \lambda (k_1 u_1 + k_3 u_2) = 0, \\ \frac{d^2 u_2}{dx^2} + \lambda (k_2 u_1 + k_3 u_2) = 0, \end{cases} \tag{17}$$

$$(X \dot{+} Z,\ Y \dot{+} T) - \lambda K (X \dot{+} Z,\ Y \dot{+} T) = 0. \tag{18}$$

Wir nehmen an, *daß* $k_1 k_3 - k_2^2$ *in keinem in* $(0\,\pi)$ *gelegenen Intervalle identisch verschwindet und zeigen, daß dann die Quadratform* $K(X \dot{+} Z, X \dot{+} Z)$ *abgeschlossen ist.*

Denn wäre

$$L(X \dot{+} Z) = l_1 X_1 + l_2 X_2 + \ldots + r_1 Z_1 + r_2 Z_2 + \ldots \tag{19}$$

eine Linearform, so daß für alle X_m, Z_m $(m = 1, 2 \ldots)$ mit konvergenter Quadratsumme identisch

$$K(X \dot{+} Z, \cdot)\, L(\cdot) = 0 \tag{20}$$

---

[5]) Vgl. L. Lichtenstein, loc. cit. [1]). Erste Abhandlung, S. 11–12.

gilt, so findet man, wenn man

$$u_1(x) = \sum_m \frac{X_m}{m} \sin m\,x, \qquad u_2(x) = \sum_m \frac{Z_m}{m} \sin m\,x,$$

$$w_1(x) = \sum_m \frac{l_m}{m} \sin m\,x, \qquad w_2(x) = \sum_m \frac{r_m}{m} \sin m\,x$$

setzt,

$$(21) \quad K(X \dotplus Z,\ l \dotplus r) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u_1[k_1 w_1 + k_2 w_2] + u_2[k_2 w_1 + k_3 w_2]\,dx.$$

Aus (20) und (21) ergibt sich

$$(22) \qquad \begin{aligned} k_1 w_1 + k_2 w_2 &\equiv 0, \\ k_2 w_1 + k_3 w_2 &\equiv 0. \end{aligned}$$

Ist nun $k_2^2 - k_1 k_3$ in keinem Intervalle identisch gleich Null, so müssen w_1 und w_2 identisch verschwinden. Es ist also

$$l_m = 0, \qquad r_m = 0 \qquad (m = 1, 2 \ldots)$$

Die Form $K(X \dotplus Z, X \dotplus Z)$ ist abgeschlossen.

Sei nun λ_α ein Eigenwert der quadratischen Form $K(X \dotplus Z,\ X \dotplus Z)$ und

$$(23) \qquad \begin{aligned} L^{(\alpha)}(X \dotplus Z) &= L_1^{(\alpha)}(X) + L_2^{(\alpha)}(Z) \\ &= l_1^{(\alpha)} X_1 + l_2^{(\alpha)} X_2 + \ldots + s_1^{(\alpha)} Z_1 + s_2^{(\alpha)} Z_2 + \ldots \end{aligned}$$

die zugehörige normierte Eigenform. Aus den in **1.** durchgeführten Betrachtungen folgt, daß λ_α ein Eigenwert des Systems (17) ist. Bilden wir

$$(24) \quad \psi^{(\alpha)}(x) = \psi_1^{(\alpha)}(x) + \psi_2^{(\alpha)}(x) = \sum_m \frac{l_m^{(\alpha)}}{m} \sin m\,x + \sum_m \frac{s_m^{(\alpha)}}{m} \sin m\,x,$$

so sind $\psi_1^{(\alpha)}(x)$ und $\psi_2^{(\alpha)}(x)$ die zugehörigen Eigenfunktionen, und zwar kennen wir nicht nur deren Summe, sondern jede einzeln, da wir uns ja bei der Ordnung der zweifach unendlich vielen Unbekannten in *eine* Reihe die Anordnung gemerkt hatten. Ist nun

$$L^{(\alpha)}(X \dotplus Z) \qquad (\alpha = 1, 2, \ldots)$$

die Gesamtheit der orthogonalen normierten Eigenformen von $K(X \dotplus Z,\ X \dotplus Z)$, so gilt

$$(25) \qquad L^{(\alpha)}(\cdot)\,L^{(\beta)}(\cdot) = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta) \\ 1 & (\alpha = \beta) \end{cases}$$

und daraus folgt nach (24)

$$(26) \qquad \int_0^\pi \left(\frac{d\psi_1^{(\alpha)}}{dx} \frac{d\psi_1^{(\beta)}}{dx} + \frac{d\psi_2^{(\alpha)}}{dx} \frac{d\psi_2^{(\beta)}}{dx} \right) dx = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta), \\ \frac{\pi}{2} & (\alpha = \beta). \end{cases}$$

Hieraus folgt durch teilweise Integration mit Rücksicht auf die Differentialgleichungen für $\psi_1^{(\alpha)}$, $\psi_2^{(\alpha)}$:

$$(27)\quad \int_0^\pi \{k_1 \psi_1^{(\alpha)} \psi_1^{\beta} + k_2 (\psi_1^{\alpha} \psi_2^{\beta} + \psi_2^{\alpha} \psi_1^{\beta}) + k_3 \psi_2^{\alpha} \psi_2^{\beta}\}\, dx = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta), \\ \dfrac{\pi}{2\lambda_\alpha} & (\alpha = \beta). \end{cases}$$

Setzt man schließlich

$$\psi_i^{(\alpha)}(x) = \sqrt{\frac{\pi}{2|\lambda_\alpha|}}\, \varphi_i^{(\alpha)}(x), \qquad (i = 1, 2),$$

so folgt

$$(28)\quad \int_0^\pi \{k_1 \varphi_1^{(\alpha)} \varphi_1^{(\beta)} + k_2 (\varphi_1^{(\alpha)} \varphi_2^{(\beta)} + \varphi_2^{(\alpha)} \varphi_1^{(\beta)}) + k_3 \varphi_2^{(\alpha)} \varphi_2^{(\beta)}\}\, dx = \begin{cases} 0 & (\alpha \neq \beta), \\ \dfrac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} & (\alpha = \beta), \end{cases}$$

womit nun die endgültige *Normierung* der Eigenfunktionen $\varphi_1^{(\alpha)}$, $\varphi_2^{(\alpha)}$ gegegeben ist. In unserm Falle bestehen also keine gesonderten Orthogonalitätsrelationen für $\varphi_1^{(\alpha)}$ oder $\varphi_2^{(\alpha)}$ allein, sondern nur die gemeinsame Relation (28).

3. Vollständigkeitsrelation. Es ist identisch, wie auch $k_1 k_3 - k_2^2$ beschaffen sei,

$$(29)\quad K(X \dot{+} Z,\ Y \dot{+} T) = \sum_\alpha \frac{1}{\lambda_\alpha} L^{(\alpha)}(X \dot{+} Z) L^{(\alpha)}(Y \dot{+} T).$$

Hieraus folgt für alle u_1, v_1; u_2, v_2, die stetige Ableitungen erster Ordnung haben und für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwinden, die Formel

$$(30)\quad \frac{2}{\pi} \int_0^\pi [v_1 (k_1 u_1 + k_2 u_2) + v_2 (k_2 u_1 + k_3 u_2)]\, dx$$

$$= \sum_\alpha \frac{4}{\pi^2 \lambda_\alpha} \int_0^\pi \left(\frac{du_1}{dx} \frac{d\psi_1^{(\alpha)}}{dx} + \frac{du_2}{dx} \frac{d\psi_2^{(\alpha)}}{dx}\right) dx \cdot \int_0^\pi \left(\frac{dv_1}{dx} \frac{d\psi_1^{(\alpha)}}{dx} + \frac{dv_2}{dx} \frac{d\psi_2^{(\alpha)}}{dx}\right) dx.$$

Setzen wir erst u_2 und v_2, dann u_1 und v_1 gleich Null, so ergeben sich die weiteren Formeln

$$(31)\quad \begin{cases} \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi k_1 u_1 v_1\, dx = \sum_\alpha \frac{4}{\pi^2 \lambda_\alpha} \int_0^\pi \frac{du_1}{dx} \frac{d\psi_1^{(\alpha)}}{dx}\, dx \cdot \int_0^\pi \frac{dv_1}{dx} \frac{d\psi_1^{(\alpha)}}{dx}\, dx, \\ \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi k_3 u_2 v_2\, dx = \sum_\alpha \frac{4}{\pi^2 \lambda_\alpha} \int_0^\pi \frac{du_2}{dx} \frac{d\psi_2^{(\alpha)}}{dx}\, dx \cdot \int_0^\pi \frac{dv_2}{dx} \frac{d\psi_2^{(\alpha)}}{dx}\, dx, \\ \dfrac{2}{\pi} \displaystyle\int_0^\pi k_2 (u_1 v_2 + u_2 v_1)\, dx = \sum_\alpha \frac{4}{\pi^2 \lambda_\alpha} \int_0^\pi \frac{du_2}{dx} \frac{d\psi_2^{(\alpha)}}{dx}\, dx \cdot \int_0^\pi \frac{dv_1}{dx} \frac{d\psi_1^{(\alpha)}}{dx}\, dx \\ \qquad\qquad + \displaystyle\int_0^\pi \frac{du_1}{dx} \frac{d\psi_1^{(\alpha)}}{dx}\, dx \cdot \int_0^\pi \frac{dv_2}{dx} \frac{d\psi_2^{(\alpha)}}{dx}\, dx. \end{cases}$$

Durch teilweise Integration und Umformung folgt aus (30)

$$\int_0^\pi [k_1 u_1 v_1 + k_2 (u_2 v_1 + u_1 v_2) + k_3 u_2 v_2]\, dx$$

$$(32) \qquad = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \int_0^\pi [k_1 u_1 \varphi_1^{(\alpha)} + k_2 (u_1 \varphi_2^{(\alpha)} + u_2 \varphi_1^{(\alpha)}) + k_3 u_2 \varphi_2^{(\alpha)}]\, dx$$

$$\cdot \int_0^\pi [k_1 v_1 \varphi_1^{(\alpha)} + k_2 (v_1 \varphi_2^{(\alpha)} + v_2 \varphi_1^{(\alpha)}) + k_3 v_2 \varphi_2^{(\alpha)}]\, dx .$$

Setzt man hier $u_1 = v_1$, $u_2 = v_2$, so folgt:

$$(33) \qquad \int_0^\pi (k_1 u_1^2 + 2 k_2 u_1 u_2 + k_3 u_2^2)\, dx$$

$$= \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \left\{ \int_0^\pi [k_1 u_1 \varphi_1^{(\alpha)} + k_2 (u_1 \varphi_2^{(\alpha)} + u_2 \varphi_1^{(\alpha)}) + k_3 u_2 \varphi_2^{(\alpha)}]\, dx \right\}^2 .$$

In einer ganz ähnlichen Weise folgt aus der Gleichung (23), wenn $k^2 - k_1 k_3$ nicht streckenweise verschwindet, die Fundamentalformel:

$$(34) \qquad \int_0^\pi \left[\left(\frac{du_1}{dx}\right)^2 + \left(\frac{du_2}{dx}\right)^2 \right] dx$$

$$= \sum_\alpha |\lambda_\alpha| \left\{ \int_0^\pi [k_1 u_1 \varphi_1^{(\alpha)} + k_2 (u_1 \varphi_2^{(\alpha)} + u_2 \varphi_1^{(\alpha)}) + k_3 u_2 \varphi_2^{(\alpha)}]\, dx \right\}^2 ,$$

die für die Variationsrechnung von Wichtigkeit ist. Es gilt nun weiter der Satz:

Ist $k_1 k_3 - k_2^2$ in einem in $(0\,\pi)$ gelegenen Intervalle $(a_1\, a_2)$ positiv und ist dort k_1 positiv, so gibt es unendlich viele positive Eigenwerte. Ist $k_1 k_3 - k_2^2$ in einem in $(0\,\pi)$ gelegenen Intervalle positiv und ist dort k_1 negativ, so gibt es unendlich viele negative Eigenwerte. Dieser Satz gilt, auch wenn $k_1 k_3 - k_2^2$ wie $(0\,\pi)$ streckenweise verschwindet. Beweisen wir die erste Aussage. Es mögen $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ die etwa nur in endlicher Anzahl vorhandenen positiven Eigenwerte bezeichnen. Es seien $\eta_1(x)$, $\eta_2(x)$ zwei nebst ihren Ableitungen stetige Funktionen, die in den Intervallen $(0\,a_1)$ und $(a_2\,\pi)$ gleich Null sind, im Innern von $(a_1\, a_2)$ jedoch nicht identisch verschwinden und den Gleichungen

$$\int_{a_1}^{a_2} [\eta_1 (k_1 \varphi_1^{(\alpha)} + k_2 \varphi_2^{(\alpha)}) + \eta_2 (k_2 \varphi_1^{(\alpha)} + k_3 \varphi_2^{(\alpha)})]\, dx = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

genügen. Führt man in (32) für u_1 und v_1 die Funktion η_1, für u_2 und v_2 die Funktion η_2 ein, so steht links etwas positives, rechts etwas negatives oder Null; man gelangt also zu einem Widerspruch. Ebenso wird der zweite Teil des Satzes bewiesen. Ist in (0π) $k_1 k_3 - k_2^2 > 0$, so ist die Form

$$k_1 u_1^2 + 2 k_2 u_1 u_2 + k_3 u_2^2 \tag{35}$$

in (0π) positiv oder negativ *definit*. Diesen Fall behandelt Hilbert mittels der Theorie der *orthogonalen* Integralgleichungen. Ist die Form (35) in (0π) nicht durchweg definit, so führt das Problem unter gewissen Einschränkungen auf eine *polare* Integralgleichung.

Um ganz allgemein über das Vorzeichen der Eigenwerte Aufschluß zu erhalten, betrachten wir die erste Gleichung (31) für $u_1 = v_1$. Wir wählen dann eine nebst ihrer ersten Ableitung stetige Funktion $\eta_1(x)$, die in $(0\,a_1)$ und $(a_2\,\pi)$ verschwindet, jedoch in $(a_1\,a_2)$ nicht identisch gleich Null ist, und die Gleichungen

$$\int_{a_1}^{a_2} \frac{d\eta_1}{dx} \frac{d\psi_1^{(\alpha)}}{dx} dx = 0 \qquad (\alpha = 1, \ldots, m)$$

befriedigt. Wenn bei in $(a_1\,a_2)$ positivem k_1 die λ_α $(\alpha = 1, \ldots, m)$ die nur in endlicher Anzahl vorhandenen positiven Eigenwerte wären, so erhielten wir wieder einen Widerspruch. *Wie auch die Diskriminante* $k_1 k_3 - k_2^2$ *beschaffen sei*, gilt also der Satz: *Ist* $k_1(x)$ *oder* $k_3(x)$ *in einem in* (0π) *gelegenen Intervall positiv, so gibt es unendlich viele positive Eigenwerte. Nimmt* $k_1(x)$ *oder* $k_3(x)$ *in* (0π) *negative Werte an, so gibt es unendlich viele negative Eigenwerte.*

4. Entwicklungssatz. Es möge jetzt $k_1 k_3 - k_2^2$ in keinem Intervalle in (0π) identisch verschwinden. Die quadratische Form $K(X \dot{+} Z, X \dot{+} Z)$ ist abgeschlossen, und es ist identisch

$$(X \dot{+} Z, Y \dot{+} T) = \sum_\alpha L^{(\alpha)}(X \dot{+} Z) L^{(\alpha)}(Y \dot{+} T), \tag{36'}$$

d. h. (vgl. (23)).

$$(X \dot{+} Z, Y \dot{+} T) = \sum_\alpha [L_1^{(\alpha)}(X) + L_2^{(\alpha)}(Z)]\,[L_1^{(\alpha)}(Y) + L_2^{(\alpha)}(T)].$$

Setzt man alle Z_i; T_j bzw. alle X_i; Y_j gleich Null, so sieht man, daß

$$\begin{aligned} (X, Y) &= \sum_\alpha L_1^{(\alpha)}(X) L_1^{(\alpha)}(Y), \\ (Z, T) &= \sum_\alpha L_2^{(\alpha)}(Z) L_2^{(\alpha)}(T), \end{aligned} \tag{36''}$$

laher

$$0 = \sum_{\alpha} L_1^{(\alpha)}(X)\, L_2^{(\alpha)}(T),$$

36‴)

$$0 = \sum_{\alpha} L_1^{(\alpha)}(Y)\, L_2^{(\alpha)}(Z),$$

omit auch

$$(X, Y) = \sum_{\alpha} L_1^{(\alpha)}(X)\,[L_1^{(\alpha)}(Y) + L_2^{(\alpha)}(T)],$$

36)

$$(Z, T) = \sum_{\alpha} L_2^{(\alpha)}(Z)\,[L_1^{(\alpha)}(Y) + L_2^{(\alpha)}(T)]$$

gilt. Von diesen Formeln gehen wir aus.

Es sei ξ irgendein Punkt in (0π) und

37) $$G(\xi, x) = \frac{(\pi - \xi)\, x}{\pi} \quad (x \leqq \xi); \qquad G(\xi, x) = \frac{(\pi - x)\, \xi}{\pi} \quad (x \geqq \xi)$$

die zu (0π) gehörige am Rande verschwindende Greensche Funktion der Differentialgleichung

$$\frac{d^2 u}{dx^2} = 0,$$

wobei bekanntlich G als Funktion von x betrachtet, stetig ist und, außer für $x = \xi$, stetige Ableitungen erster und zweiter Ordnnng hat und den Beziehungen genügt:

38) $$\frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = 0,$$

$$G(\xi, 0) = G(\xi, \pi) = 0,$$

39) $$\frac{\partial}{\partial x} G(\xi, \xi + 0) - \frac{\partial}{\partial x} G(\xi, \xi - 0) = -1.$$

Wie sich durch teilweise Integration zeigt, ist ferner

40) $$\int_0^{\pi} \left(\frac{\partial G}{\partial x}\right)^2 dx = G(\xi, \xi).$$

Es seien jetzt $f_1(x)$, $f_2(x)$ beliebige stetige für $x = 0$ und $x = \pi$ verschwindende, in gleichmäßig konvergente trigonometrische Reihen

$$f_1(x) = \sum_i f_1^i \sin ix,$$

41)

$$f_2(x) = \sum_i f_2^i \sin ix$$

entwickelbare Funktionen. Wir nehmen an, daß auch die unendliche Reihe

$$\sum i^3 [(f_1^i)^2 + (f_2^i)^2].$$

konvergiert. Es sei endlich

$$G(\xi, x) = \sum g_i \sin ix. \tag{42}$$

Wir setzen nun in (36) für $X_i, Y_i; Z_i, T_i$ entsprechend $ig_i, if_1^i; ig_i, if_2^i$ ein und erhalten, wenn wir

$$f_1^{(n)}(x) = \sum_i^{1\ldots n} f_1^i \sin ix, \qquad f_2^{(n)}(x) = \sum_i^{1\ldots n} f_2^i \sin ix$$

setzen,

$$(X, Y) = \sum i^2 g_i f_1^i = \lim_{n=\infty} \sum_i^{1\ldots n} i^2 g_i f_1^i = \lim_{n=0} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G}{\partial x} \frac{df^{(n)}(x)}{dx} dx$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi} f^{(n)}(\xi) = \frac{2}{\pi} f(\xi),$$

$$L_1^{(\alpha)}(X) = \sum_i i l_i^{(\alpha)} g_i = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\partial G}{\partial x} \frac{d\psi_1^{(\alpha)}}{dx} dx = \frac{2}{\pi} \psi_1^{(\alpha)}(\xi) = \sqrt{\frac{2}{\pi |\lambda_\alpha|}}\, \varphi_1^{(\alpha)}(\xi),$$

$$L_2^{(\alpha)}(Z) = \sum_i i s_i^{(\alpha)} g_i = \sqrt{\frac{2}{\pi |\lambda_\alpha|}}\, \varphi_2^{(\alpha)}(\xi),$$

$$L_1^{(\alpha)}(Y) + L_2^{(\alpha)}(T) = \sum_i i (l_i^{(\alpha)} f_1^i + s_i^{(\alpha)} f_2^i) \tag{42*}$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \left(\frac{d\psi_1^{(\alpha)}}{dx} \frac{df_1^{(\alpha)}}{dx} + \frac{d\psi_2^{(n)}}{dx} \frac{df_2^{(n)}}{dx} \right) dx$$

$$= \lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi} \lambda_\alpha \int_0^\pi [f_1^{(n)}(k_1 \psi_1^{(\alpha)} + k_2 \psi_2^{(\alpha)}) + f_2^{(n)}(k_2 \psi_1^{(\alpha)} + k_3 \psi_2^{(\alpha)})]\, dx$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi |\lambda_\alpha|}}\, \lambda_\alpha \int_0^\pi [f_1(k_1 \varphi_1^{(n)} + k_2 \varphi_2^{(n)}) + f_2(k_2 \varphi_1^{(\alpha)} + k_3 \varphi_2^{(\alpha)})]\, dx.$$

Somit ergeben sich die Formeln

$$(43) \quad \begin{cases} f_1(\xi) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_1^{(\alpha)}(\xi) \int_0^\pi [f_1(k_1 \varphi_1^{(\alpha)} + k_2 \varphi_2^{(\alpha)}) + f_2(k_2 \varphi_1^{(\alpha)} + k_3 \varphi_2^{(\alpha)})]\, d \\ f_2(\xi) = \sum_\alpha \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_2^{(\alpha)}(\xi) \int_0^\pi [f_1(k_1 \varphi_1^{(\alpha)} + k_2 \varphi_2^{(\alpha)}) + f_2(k_2 \varphi_1^{(\alpha)} + k_3 \varphi_2^{(\alpha)})]\, d \end{cases}$$

Setzt man

$$\frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \int_0^\pi [f_1(k_1 \varphi_1^{(\alpha)} + k_2 \varphi_2^{(\alpha)}) + f_2(k_2 \varphi_1^{(\alpha)} + k_3 \varphi_2^{(\alpha)})]\, dx = c_\alpha,$$

so erhält man

$$(44)\qquad \begin{cases} f_1(\xi) = \sum_\alpha c_\alpha \varphi_1^{(\alpha)}(\xi), \\ f_2(\xi) = \sum_\alpha c_\alpha \varphi_2^{(\alpha)}(\xi), \end{cases}$$

Diese Formeln sind zuerst von Hilbert unter wesentlich stärker einschränkenden Voraussetzungen abgeleitet worden[6]).

Setzen wir in (44) $f_1 = f_2 = f$, so ergibt sich

$$(45)\qquad f(\xi) = \sum_\alpha c_\alpha \varphi_1^{(\alpha)} = \sum_\alpha c_\alpha \varphi_2^{(\alpha)} = \sum_\alpha c_\alpha \frac{\varphi_1^{(\alpha)} + \varphi_2^{(\alpha)}}{2}.$$

Setzt man ferner

$$(46)\qquad \begin{cases} \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \int_0^\pi f(x)(k_1 \varphi_1^{(\alpha)} + k_2 \varphi_2^{(\alpha)})\, dx = c_1^{(\alpha)}, \\ \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \int_0^\pi f(x)(k_2 \varphi_1^{(\alpha)} + k_3 \varphi_2^{(\alpha)})\, dx = c_2^{(\alpha)}, \; c_1^{(\alpha)} + c_2^{(\alpha)} = c_\alpha, \end{cases}$$

so folgt bei Berücksichtigung von (36″), (36‴) und (42*)

$$(45')\qquad \begin{cases} 0 = \sum_\alpha c_2^{(\alpha)} \varphi_1^{(\alpha)}(\xi), \\ 0 = \sum_\alpha c_1^{(\alpha)} \varphi_2^{(\alpha)}(\xi), \\ f(\xi) = \sum_\alpha c_1^{(\alpha)} \varphi_1^{(\alpha)}(\xi), \\ f(\xi) = \sum_\alpha c_2^{(\alpha)} \varphi_2^{(\alpha)}(\xi). \end{cases}$$

Die unendlichen Reihen (43) *und somit auch* (45), (45′) *konvergieren unbedingt und gleichmäßig*[6]).

In der Tat ist

$$(46)\qquad \Big[\sum_\alpha^{n\ldots\infty} |L_1^{(\alpha)}(X)\{L_1^{(\alpha)}(Y) + L_2^{(\alpha)}(T)\}|\Big]^2 \leqq \sum_\alpha^{n\ldots\infty} [L_1^{(\alpha)}(X)]^2 \sum_\alpha^{n\ldots\infty} [L_1^{(\alpha)}(Y) + L_2^{(\alpha)}(T)]^2.$$

Nun ist

$$(46')\qquad \sum_\alpha^{1\ldots\infty} [L_1^{(\alpha)}(X)]^2 = (X, X) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \Big(\frac{\partial G}{\partial x}\Big)^2 dx.$$

---

[6]) Vgl. D. Hilbert, loc. cit. S. 211.

Die unendliche Reihe

$$\sum_{\alpha}^{1\ldots\infty}[L_1^{(\alpha)}(Y)+L_2^{(\alpha)}(T)]^2=(Y\dot{+}T,Y\dot{+}T)$$

konvergiert; somit konvergiert, wie man jetzt leicht sieht, (43), wie behauptet, unbedingt und gleichmäßig.

Wir setzen in (45′) insbesondere

$$f_1(\xi)=G(\xi^*,\xi)$$

und ebenso

$$f_2(\xi)=G(\xi^*,\xi)$$

und erhalten leicht

$$\begin{aligned}G(\xi^*,\xi)&=\sum_{\alpha}\frac{1}{|\lambda_\alpha|}\varphi_1^{(\alpha)}(\xi)\,\varphi_1^{(\alpha)}(\xi^*)\\&=\sum_{\alpha}\frac{1}{|\lambda_\alpha|}\varphi_2^{(\alpha)}(\xi)\,\varphi_2^{(\alpha)}(\xi^*).\end{aligned}\tag{47}$$

Man findet, daß auch die unendlichen Reihen (47) unbedingt und gleichmäßig konvergieren.

Will man die Formeln (44) in gewohnter Weise *verifizieren*, so multipliziert man die erste dieser Gleichungen mit $(k_1\varphi_1^{(\beta)}+k_2\varphi_2^{(\beta)})$, die zweite mit $(k_2\varphi_1^{(\beta)}+k_3\varphi_2^{(\beta)})$, integriert zwischen 0 und π, und addiert; es ergibt sich

$$c_\beta=\sum_{\alpha}\frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|}c_\alpha\int_0^\pi\{k_1\varphi_1^{(\alpha)}\varphi_1^{(\beta)}+k_2[\varphi_1^{(\alpha)}\varphi_2^{(\beta)}+\varphi_2^{(\alpha)}\varphi_1^{(\beta)}]+k_3\varphi_2^{(\alpha)}\varphi_2^{(\beta)}\}\,dx.$$

Nach (28) fallen rechts alle Glieder weg außer für $\alpha=\beta$ und es bleibt $c_\beta=c_\beta$ w. z. b. w.

5. Wir gehen jetzt zu dem allgemeineren Fall des Systems

$$\begin{aligned}&\frac{d}{dx}\left(p_1\frac{du_1}{dx}+p_2\frac{du_2}{dx}\right)+l\frac{du_2}{dx}+(q_1+\lambda k_1)u_1+\left(q_2+\frac{1}{2}\frac{dl}{dx}+\lambda k_2\right)u_2=\\&\frac{d}{dx}\left(p_2\frac{du_1}{dx}+p_3\frac{du_2}{dx}\right)-l\frac{du_1}{dx}+\left(q_2-\frac{1}{2}\frac{dl}{dx}+\lambda k_2\right)u_1+(q_3+\lambda k_3)u_2=\end{aligned}\tag{I}$$

über und setzen voraus, daß die quadratische Form

$$\begin{aligned}F\left(\frac{du_1}{dx},\frac{du_2}{dx},u_1,u_2\right)&=p_1\left(\frac{du_1}{dx}\right)^2+p_2\frac{du_1}{dx}\frac{du_2}{dx}+p_3\left(\frac{du_2}{dx}\right)^2\\&\quad-\left[l\left(u_1\frac{du_2}{dx}-u_2\frac{du_1}{dx}\right)+(q_1u_1^2+2q_2u_1u_2+q_3u_2^2)\right]\end{aligned}\tag{48}$$

für alle x in dem Intervalle $(0,\pi)$ einen *positiv definiten* (oder negativ definiten) Charakter hat. Um die symmetrische Bauart von F hervorzu-

heben, können wir formal die Funktionen p_{ik}, q_{ik}, r_{ik} $(i, k = 1, 2)$ durch die folgenden Gleichungen einführen

$$(49)\quad l = q_{12} - q_{21},\quad q_1 = \frac{dq_{11}}{dx} - r_{11},\quad q_3 = \frac{dq_{22}}{dx} - r_{22},\quad p_1 = p_{11},\quad p_2 = p_{12},$$

$$q_2 + \frac{1}{2}\frac{dl}{dx} = \frac{dq_{12}}{dx} - r_{12},\qquad q_2 - \frac{1}{2}\frac{dl}{dx} = \frac{dq_{21}}{dx} - r_{12},\qquad p_3 = p_{22}$$

und erhalten aus (I), wenn wir überdies der Kürze halber das noch *nicht* durch λ *erweiterte* und *homogene* Gleichungssystem ausschreiben:

$$(\mathrm{I}'')\quad \begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(p_{11}\frac{du_1}{dx} + p_{12}\frac{du_2}{dx}\right) + (q_{12} - q_{21})\frac{du_2}{dx} + \left(\frac{dq_{11}}{dx} - r_{11}\right)u_1 + \left(\frac{dq_{12}}{dx} - r_{12}\right)u_2 = 0,\\ &\frac{d}{dx}\left(p_{12}\frac{du_1}{dx} + p_{22}\frac{du_2}{dx}\right) + (q_{21} - q_{12})\frac{du_1}{dx} + \left(\frac{dq_{21}}{dx} - r_{12}\right)u_1 + \left(\frac{dq_{22}}{dx} - r_{22}\right)u_2 = 0, \end{aligned}$$

oder

$$(\mathrm{I}''')\quad \begin{aligned} &\frac{d}{dx}\left(p_{11}\frac{du_1}{dx} + p_{12}\frac{du_2}{dx} + q_{11}u_1 + q_{12}u_2\right)\\ &- \left(q_{11}\frac{du_1}{dx} + q_{21}\frac{du_2}{dx} + r_{11}u_1 + r_{12}u_2\right) = 0,\\ &\frac{d}{dx}\left(p_{12}\frac{du_1}{dx} + p_{22}\frac{du_2}{dx} + q_{21}u_1 + q_{22}u_2\right)\\ &- \left(q_{12}\frac{du_1}{dx} + q_{22}\frac{du_2}{dx} + r_{12}u_1 + r_{22}u_2\right) = 0, \end{aligned}$$

dem offenbar die allgemeine quadratische Form

$$\begin{aligned} (48')\quad Q\left(\frac{du_1}{dx}, \frac{du_2}{dx}, u_1, u_2\right) &= p_{11}\left(\frac{du_1}{dx}\right)^2 + 2p_{12}\frac{du_1}{dx}\frac{du_2}{dx} + p_{22}\left(\frac{du_2}{dx}\right)^2\\ &+ 2q_{11}u_1\frac{du_1}{dx} + 2q_{12}u_2\frac{du_1}{dx} + 2q_{21}u_1\frac{du_2}{dx} + 2q_{22}u_2\frac{du_2}{dx}\\ &+ r_{11}u_1^2 + 2r_{12}u_1u_2 + r_{22}u_2^2 \end{aligned}$$

zugeordnet ist[7]).

Wir gehen nun von den Formeln aus:

$$(50)\quad \begin{aligned} &\int_0^\pi \Big\{p_1\frac{du_1}{dx}\frac{dv_1}{dx} + p_2\frac{du_2}{dx}\frac{dv_1}{dx} - lv_1\frac{du_2}{dx}\\ &- (q_1 + \lambda k_1)u_1v_1 - \left(q_2 + \frac{1}{2}\frac{dl}{dx} + \lambda k_2\right)u_2v_1 + h_1v_1\Big\}dx = 0,\\ &\int_0^\pi \Big\{p_2\frac{du_1}{dx}\frac{dv_2}{dx} + p_3\frac{du_2}{dx}\frac{dv_2}{dx} + lv_2\frac{du_1}{dx}\\ &- \left(q_2 - \frac{1}{2}\frac{dl}{dx} + \lambda k_2\right)u_1v_2 - (q_3 + \lambda k_3)u_2v_2 + h_2v_2\Big\}dx = 0 \end{aligned}$$

[7]) Dies ist die von Hilbert, Grundzüge einer allgemeinen Theorie usw., S. 206 betrachtete Form, deren positiv definiten Charakter er S. 211 verlangt.

und erhalten die Beziehung

$$(51)\quad P(X \dot{+} Z, Y \dot{+} T) - L(X \dot{+} Z, Y \dot{+} T) - Q(X \dot{+} Z, Y \dot{+} T) - \lambda K(X \dot{+} Z, Y \dot{+} T) = M(Y \dot{+} T),$$

wobei

$$(52)\quad P = P_1 + P_2 + P_3 + P_4 = \sum_{ij}{}' X_i Y_j \int_0^\pi p_1 \cos is \cos jsds + \ldots,$$

$$L = \sum_{ij}{}' \frac{Z_i Y_j}{j} \int_0^\pi l \cos is \sin jsds - \sum_{ij}{}' \frac{X_i T_j}{j} \int_0^\pi l \cos is \sin jsds, \ldots$$

ist; Q, K und M haben eine ähnliche Bedeutung wie in **1**. Die Symmetrie des Ausdrucks $P - Q - L$ erhellt aus (50).

Wie sich leicht zeigen läßt, ist

$$P(X \dot{+} Z, X \dot{+} Z) - Q(X \dot{+} Z, X \dot{+} Z) - L(X \dot{+} Z, X \dot{+} Z).$$

eine beschränkte positiv definite Quadratform. Für alle der Gleichung

$$(53)\quad \sum_{i}^{1\ldots\infty}{}' (X_i^2 + Z_i^2) = 1$$

genügenden Werte der Variablen ist sie größer als eine positive Konstante c [8]).

Einem bekannten Satze des Herrn O. Toeplitz zufolge [9]) läßt sich eine lineare Transformation

$$(54)\quad \begin{cases} \underline{X}_\alpha = \underline{S}_1^{(\alpha)}(X \dot{+} Z), & \underline{Z}_\alpha = \underline{S}_2^{(\alpha)}(X \dot{+} Z), \\ X_\alpha = S_1^{(\alpha)}(\underline{X} \dot{+} \underline{Z}), & Z_\alpha = S_2^{(\alpha)}(\underline{X} \dot{+} \underline{Z}), \\ \underline{Y}_\alpha = \underline{S}_1^{(\alpha)}(Y \dot{+} T), & \underline{T}_\alpha = \underline{S}_2^{(\alpha)}(Y \dot{+} T), \\ Y_\alpha = S_1^{(\alpha)}(\underline{Y} \dot{+} \underline{T}), & T_\alpha = S_2^{(\alpha)}(\underline{Y} \dot{+} \underline{T}) \end{cases}$$

angeben, so daß

$$(55)\quad P(X \dot{+} Z, Y \dot{+} T) - Q(X \dot{+} Z, Y \dot{+} T) - L(X \dot{+} Z, Y \dot{+} T) = \sum_{\alpha}{}' (\underline{X}_\alpha \underline{Y}_\alpha + \underline{Z}_\alpha \underline{T}_\alpha) = (\underline{X} \dot{+} \quad, \underline{Y} \dot{+} \underline{T})$$

wird. Es sei nunmehr

$$(56)\quad K(X \dot{+} Z, Y \dot{+} T) = \underline{K}(\underline{X} \dot{+} \underline{Z}, \underline{Y} \dot{+} \underline{T}),$$
$$M(Y \dot{+} T) = \underline{M}(\underline{Y} \dot{+} \underline{T}).$$

---

[8]) Vgl. die analogen Betrachtungen in der in der Fußnote [1]) zitierten Arbeit des Herrn Lichtenstein, S. 23–24.

[9]) Vgl. O. Toeplitz, Die Jacobische Transformation der quadratischen Formen von unendlich vielen Veränderlichen, Göttinger Nachr. 1907, S. 101–109.

Offenbar ist $\underline{K}(X \dot{+} \underline{Z}, \underline{Y} \dot{+} \underline{T})$ eine vollstetige Quadratform. Die Gleichung (51) geht über in

$$(57) \qquad (\underline{X} \dot{+} \underline{Z}, \underline{Y} \dot{+} \underline{T}) - \lambda \underline{K}(\underline{X} \dot{+} \underline{Z}, \underline{Y} \dot{+} \underline{T}) = M(\underline{Y} \dot{+} \underline{T}).$$

Die weitere Betrachtung verläuft im wesentlichen wie in Nummer 2—4 [10]). Alle dort abgeleiteten Sätze bleiben in Geltung. Der Entwicklungsatz lautet:

Es seien $f_1(x)$, $f_2(x)$ zwei beliebige in $(0\,\pi)$ erklärte, in gleichmäßig konvergente Sinusreihen entwickelbare Funktionen:

$$f_1(x) = \sum_i^{1\ldots\infty} f_1^i \sin ix, \qquad f_2(x) = \sum_i^{1\ldots\infty} f_2^i \sin ix.$$

Sind die unendlichen Reihen

$$\sum_i^{1\ldots\infty} i^2 (f_1^i)^2 \quad \text{und} \quad \sum_i^{1\ldots\infty} i^2 (f_2^i)^2$$

konvergent [11]) *und verschwindet $k_2^2 - k_1 k_3$ in keinem in $(0\,\pi)$ gelegenen Intervalle identisch, so gelten die Entwicklungen*

$$f_1(x) = \sum_\alpha^{1\ldots\infty} \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_1^{(\alpha)}(x) \int_0^\pi \{f_1(k_1 \varphi_1^{(\alpha)} + k_2 \varphi_2^{(\alpha)}) + f_2(k_2 \varphi_1^{(\alpha)} + k_3 \varphi_2^{(\alpha)})\}\, dx,$$

$$f_2(x) = \sum_\alpha^{1\ldots\infty} \frac{\lambda_\alpha}{|\lambda_\alpha|} \varphi_2^{(\alpha)}(x) \int_0^\pi \{f_1(k_1 \varphi_1^{(\alpha)} + k_2 \varphi_2^{(\alpha)}) + f_2(k_2 \varphi_1^{(\alpha)} + k_3 \varphi_2^{(\alpha)})\}\, dx,$$

sowie die übrigen in 4 angegebenen Entwicklungen. Die unendlichen Reihen konvergieren sämtlich unbedingt und gleichmäßig.

---

[10]) Man vgl. hierzu auch die wiederholt zitierte Arbeit des Herrn Lichtenstein, S. 23—25.

[11]) Das heißt besitzen f_1 und f_2 quadratisch integrierbare Ableitungen und ist

$$f_1 = \int_0^x \frac{df_1}{dx}\, dx, \quad f_2 = \int_0^x \frac{df_2}{dx}\, dx.$$

(Eingegangen am 16. April 1920.)

Über binäre trilineare Formen.

Von

Elise Schwartz in Beuel a. Rh.

In der Entwicklung der Invariantentheorie der linearen Transformationen hat sich das Augenmerk der Forscher verständlicherweise zunächst auf den einfachsten Fall, auf die Theorie der binären Formen gerichtet. Daran schlossen sich Untersuchungen über ternäre Formen usw. Es ist aber auch in anderer Richtung ein Fortschreiten möglich, indem man in Formen von mehreren Veränderlichen (nach der üblichen Terminologie mit mehreren Reihen von Veränderlichen) diese voneinander unabhängigen linearen Transformationen unterwirft. Unter den einfachsten Fällen dieser Art bietet bereits ein erhebliches Interesse eine trilineare Form mit Veränderlichen dreier binärer Gebiete. Dieser bildet den Gegenstand der folgenden Untersuchung.

Was von sonstigen Arbeiten über trilineare Formen mir bekannt geworden ist, entspricht nicht dem bezeichneten Programm. Eine Bearbeitung von Le Paige[1]) bringt nur einige Einzelheiten, während eine Untersuchung von Dedekind[2]) den Stoff überhaupt nicht vom Gesichtspunkt der Invariantentheorie aus behandelt, was in gleicher Weise in den Untersuchungen von Geometern wie bei der Augustschen Erzeugungsart der Flächen dritter Ordnung[3]) der Fall ist.

§ 1.

Das vollständige Formensystem.

Bei der Untersuchung der allgemeinen trilinearen Form $P = (\alpha x)(\beta y)(\gamma z)$ im Sinne der gewöhnlichen Invariantentheorie treten drei getrennte Probleme

[1]) Le Paige, Sur la théorie des formes binaires à plusieurs séries de variables. Bulletins de l'Acad. royal 1881, 3me Série, T. 2, p. 40–53.

[2]) R. Dedekind, Über binäre trilineare Formen und die Komposition der binären quadratischen Formen, Journal für r. u. angew. Math. 129 (1905), S. 1–34.

[3]) H. Schubert, Die trilineare Beziehung zwischen drei einstufigen Grundgebilden. Math. Ann. 17 (1880), S. 457–472.

auf. Man kann nämlich die trilineare Form als zu einem, zwei oder drei verschiedenen binären Gebieten gehörig betrachten, je nachdem man die drei Veränderlichen alle auf gleiche Art oder nur zwei auf gleiche Art oder jede anders transformiert. Wir behandeln den letzten und vielleicht interessantesten Fall etwas näher, um gegen Ende auf den ersten nur kurz einzugehen.

Der Ausgangspunkt jenes genannten dritten Falles, dessen Betrachtung wir nunmehr in Angriff nehmen, sei die Aufstellung des ihn charakterisierenden *vollständigen Formensystems*. Es gestaltet sich folgendermaßen:

1. Die Grundform

$$P = (\alpha x)(\beta y)(\gamma z);$$

2. die zweiten Überschiebungen von P über sich selbst nach y und z, z und x, x und y:

$$\Delta_\alpha = (\delta_\alpha x)^2 = \frac{1}{2}(\beta\beta')(\gamma\gamma')(\alpha x)(\alpha' x),$$

$$\Delta_\beta = (\delta_\beta y)^2 = \frac{1}{2}(\gamma\gamma')(\alpha\alpha')(\beta y)(\beta' y),$$

$$\Delta_\gamma = (\delta_\gamma z)^2 = \frac{1}{2}(\alpha\alpha')(\beta\beta')(\gamma z)(\gamma' z);$$

3. die drei untereinander gleichen Überschiebungen von P über Δ_α, Δ_β, Δ_γ:

$$Q = (ax)(by)(cz)$$
$$= 2(\alpha\delta_\alpha)(\delta_\alpha x)(\beta y)(\gamma z) = -(\beta\beta')(\gamma\gamma')(\alpha'\alpha'')(\alpha x)(\beta'' y)(\gamma'' z),$$
$$= 2(\beta\delta_\beta)(\delta_\beta y)(\gamma z)(\alpha x) = -(\gamma\gamma')(\alpha\alpha')(\beta'\beta'')(\beta y)(\gamma'' z)(\alpha'' x),$$
$$= 2(\gamma\delta_\gamma)(\delta_\gamma z)(\alpha x)(\beta y) = -(\alpha\alpha')(\beta\beta')(\gamma'\gamma'')(\gamma z)(\alpha'' x)(\beta'' y);$$

4. die gemeinsame Diskriminante der drei quadratischen Formen Δ_α, Δ_β, Δ_γ:

$$R = \begin{cases} 2(\delta_\alpha\delta'_\alpha) = \frac{1}{2}(\beta\beta')(\gamma\gamma')(\alpha'\alpha'')(\alpha\alpha''')(\beta''\beta''')(\gamma''\gamma'''), \\ 2(\delta_\beta\delta_\beta) = \frac{1}{2}(\gamma\gamma')(\alpha\alpha')(\beta'\beta'')(\beta\beta''')(\gamma''\gamma''')(\alpha''\alpha'''), \\ 2(\delta_\gamma\delta'_\gamma) = \frac{1}{2}(\alpha\alpha')(\beta\beta')(\gamma'\gamma'')(\gamma\gamma''')(\alpha''\alpha''')(\beta''\beta'''). \end{cases}$$

Zum Beweis für die Vollständigkeit dieses Systems beachten wir zunächst, daß in ihm nur Klammerfaktoren der Typenpaare $(\alpha\alpha')$, (αx); $(\beta\beta')$, (βy); $(\gamma\gamma')$, (γz) möglich sind. Wir können dann in folgender Weise vorgehen:

Als erstes läßt sich zeigen, daß jede Form zweiten oder höheren Grades, die nicht ohne weiteres zerfällt, in der sich daher z. B. ein

Faktor $(\alpha\alpha')$ findet, mit mindestens einem der drei Symbole δ geschrieben werden kann. Jede solche Form nämlich läßt sich auf die Gestalt

$$(\alpha\alpha')(\beta y)(\beta' y')(\gamma z)(\gamma' z')$$

bringen, die durch die Reihenentwicklung:

$$(\alpha\alpha')(\beta y)(\beta' y')(\gamma z)(\gamma' z') = \frac{1}{2}(\alpha\alpha')(\beta\beta')(\gamma z)(\gamma' z')(y y')$$
$$+\frac{1}{2}(\gamma\gamma')(\alpha\alpha')(\beta y)(\beta' y')(z z') = (\delta_\gamma z)(\delta_\gamma z')(y y') + (\delta_\beta y)(\delta_\beta y')(z z')$$

in der Tat unsere Behauptung bestätigt.

Ist auf diese Weise der Grad in den Symbolen durch Einführung neuer Zeichen δ erniedrigt, so können dabei Klammerfaktoren $(\alpha\delta_\alpha)$, $(\beta\delta_\beta)$, $(\gamma\delta_\gamma)$ auftreten. Da diese aber in jedem Fall eine Einführung der Symbole der Form Q zulassen, so können wir gleich zur Untersuchung solcher Invarianten übergehen, in denen die Zeichen a, b, c in irgendeiner Kombination auftreten.

Die Verbindung der Symbole von Q mit Symbolen der Grundform führt auf Klammerfaktoren (αa), (βb), (γc). Ist einer von ihnen z. B. (αa) vorhanden, so ist der Ausdruck eine Kovariante der Form

$$(\alpha a)(\beta y)(b y')(\gamma z)(c z');$$

durch Reihenentwicklung und entsprechende Umrechnung ergibt sich hieraus:

$$(\alpha a)(\beta y)(b y')(\gamma z)(c z') = -2(\delta_\beta y)(\delta_\beta y')\cdot(\delta_\gamma z)(\delta_\gamma z') + \frac{1}{2}R(y y')\cdot(z z')$$

so daß die angenommene Art von Klammerfaktoren wiederum nur auf bekannte Formen und zwar hier auf Δ_α, Δ_β, Δ_γ und R führt. Hat insbesondere ein nicht verschwindender Ausdruck zwei jener Faktoren, so tritt notwendig R in ihm auf.

Kombinieren wir ferner die Symbole von Q mit denen der quadratischen Formen Δ, so handelt es sich um einen Ausdruck, der vielleicht $(a\delta_a)$ als Klammerfaktor enthält und sich immer auf folgende Form bringen läßt, die wir gleich berechnen wollen:

$$-2(a\delta_a)(\delta_a x)(b y)(c z)\,.$$
$$= (\beta\beta')(\gamma\gamma')(\alpha'\alpha'')(\alpha\alpha''')(\beta'''\beta'''')(\gamma'''\gamma'''')(\alpha''''x)(\beta'' y)(\gamma'' z) = R\cdot P.$$

Auch diese Formen liefern mithin nichts Neues zu dem gesamten Formensystem.

Die letzte Möglichkeit endlich sind Formen mit Faktoren $(a a')$, $(b b')$, $(c c')$. Auch für sie aber läßt sich, ähnlich wie im ersten Fall, durch die Reihenentwicklung der Kovariante

$$(aa')(by)(b'y')(cz)(c'z') = \frac{1}{2}(aa')(bb')(cz)(c'z')\cdot(yy')$$

$$+\frac{1}{2}(cc')(aa')(by)(b'y')(zz') = (\delta_\gamma z)(\delta_\gamma z')\cdot(yy')\cdot R + (\delta_\beta y)(\delta_\beta y')\cdot(zz')\cdot R$$

unmittelbar zeigen, daß sie stets Symbole der quadratischen Kovarianten Δ und die Invariante R als Faktor einzuführen gestatten.

Hieraus kann man nach bekannten Methoden schließen, daß sich durch das aufgestellte System alle Kovarianten und Invarianten einer trilinearen Form ganz und rational ausdrücken lassen.

Offenbar weist es eine weitgehende Analogie zu dem Formensystem einer binären kubischen Form auf. Es wird sich überraschenderweise zeigen, daß diese Analogie noch viel weiter führt und sich auch auf irrationale Kovarianten und Invarianten erstreckt. Selbst die dort bestehende Relation findet sich in kaum veränderter Gestalt hier wieder. Es ist

$$\{(ax)(by)(cz)\}^2 + 4(\delta_\alpha x)^2\cdot(\delta_\beta y)^2\cdot(\delta_\gamma z)^2 + R\{(\alpha x)(\beta y)(\gamma z)\}^2 \equiv 0$$

oder

(1) $$\boxed{Q^2 + 4\Delta_\alpha\cdot\Delta_\beta\cdot\Delta_\gamma + R\cdot P^2 \equiv 0}$$

§ 2.

Klassifikation der trilinearen Formen.

Die weiteren theoretischen Erörterungen sollen sich auf einer durch das Formensystem gegebenen Klassifikation der trilinearen Formen aufbauen. Wir unterscheiden zunächst, je nachdem die einzige Invariante R des Systems $R = 0$ oder $R \neq 0$ ist, reguläre und singuläre Formen. Davon bilden die regulären Formen eine eigene Klasse, während sich die singulären wiederum in nicht reduzible, teilweise reduzible und vollständig reduzible Formen spalten, die durch das Verschwinden der Quadrate Δ charakterisiert werden und uns noch fünf weitere Formenklassen liefern. Wir wollen dabei für die Konstantenzählung die Koeffizienten der trilinearen Form als homogene Größen betrachten, weil uns hauptsächlich die Korrespondenz interessiert, die durch die Gleichung $(\alpha x)(\beta y)(\gamma z) = 0$ dargestellt wird. Die sechs Klassen sind nun folgende:

I. $R \neq 0$ entspricht der siebendimensionalen linearen Mannigfaltigkeit der regulären trilinearen Formen. — Es entsteht die Aufgabe, die Stellung von zwei zusammen gehörigen Formen P und Q als Formenpaare innerhalb der gesamten Mannigfaltigkeit zu untersuchen. Dabei verbinden wir zunächst zwei beliebige reguläre Formen P und P' durch eine lineare eindimensionale Mannigfaltigkeit

$$kP + \lambda P'.$$

Dann erhält man durch Einsetzen dieser Form in die Invariante R einen

Ausdruck vierten Grades in den Parametern $k:\lambda$, so daß in dem Büschel $kP+\lambda P'$ im allgemeinen vier singuläre Formen enthalten sind. Diese reduzieren sich auf die Hälfte, sobald die linke Seite der entstehenden biquadratischen Gleichung ein vollständiges Quadrat wird, und das eben ist der Fall, wenn wir aus dem Formenpaar P, Q das Büschel hervorgehen lassen. Wir werden unsere Behauptung in dem Formensystem eines solchen „syzygetischen" Büschels bestätigt sehen, das wir ohne Ableitung hier aufstellen wollen:

$$(2)\qquad \begin{array}{ll} P_{k\lambda}=kP+\lambda Q & \Delta^{\alpha}_{k\lambda}=(k^2+R\lambda^2)\Delta_\alpha \\ Q_{k\lambda}=(k^2+R\lambda^2)(kQ-\lambda RT) & \Delta^{\beta}_{k\lambda}=(k^2+R\lambda^2)\Delta_\beta \\ R_{k\lambda}=(k^2+R\lambda^2)^2R & \Delta^{\gamma}_{k\lambda}=(k^2+R\lambda^2)\Delta_\gamma \end{array}$$

Es ergibt sich also, daß die quadratischen Formen Δ, abgesehen von Proportionalitätsfaktoren, für alle Formen des syzygetischen Büschels die gleichen sind. Heben wir ferner noch einmal die oben angegebene Eigenschaft hervor, daß nämlich $R_{k\lambda}=0$ zwei Doppelwurzeln besitzt, und zwar $k:\lambda=\pm\sqrt{-R}$, so können wir nunmehr aus unserer Zusammenstellung ablesen, daß für eben dieselben Parameterwerte auch alle übrigen Formen des Systems (außer $P_{k\lambda}$) identisch verschwinden. Wir stützen uns, um die Art der zugehörigen Formen festzustellen, auf die Relation (1)

$$R\cdot P^2+4\,\Delta_\alpha\cdot\Delta_\beta\cdot\Delta_\gamma+Q^2=0.$$

Schreiben wir sie in folgender Weise:

$$-4\,\Delta_\alpha\cdot\Delta_\beta\cdot\Delta_\gamma=(Q+\sqrt{-R}\,P)(Q-\sqrt{-R}\,P),$$

so läßt sich die linke Seite in zwei Produkte von je drei Linearfaktoren in x, y und z zerlegen, während rechts von vorn herein das Produkt zweier in x, y und z linearer Ausdrücke steht. Wir können deshalb setzen:

$$(3)\qquad \begin{aligned} (\sigma_\alpha x)\cdot(\sigma_\beta y)\cdot(\sigma_\gamma z)&=\tfrac{1}{2}(Q+\sqrt{-R}\,P), \\ (\tau_\alpha x)\cdot(\tau_\beta y)\cdot(\tau_\gamma z)&=\tfrac{1}{2}(Q-\sqrt{-R}\,P), \end{aligned}$$

wenn $\sigma_\alpha, \sigma_\beta, \sigma_\gamma$ und $\tau_\alpha, \tau_\beta, \tau_\gamma$ die Nullstellen der genannten Linearfaktoren sind. Diese sind indessen durch die Gleichungen (3) nur bestimmt bis auf konstante Faktoren $\mu_\alpha, \mu_\beta, \mu_\gamma$; $\nu_\alpha, \nu_\beta, \nu_\gamma$, mit denen wir die Linearfaktoren der Reihe nach multiplizieren können, vorausgesetzt, daß die Relationen

$$\mu_\alpha\mu_\beta\mu_\gamma=1, \qquad \nu_\alpha\nu_\beta\nu_\gamma=1$$

erfüllt sind. $\mu_\alpha, \nu_\alpha, \mu_\beta, \nu_\beta$ können dabei so gewählt werden, daß sie die beiden ersten der Gleichungen befriedigen:

$$(\sigma_\alpha x)\cdot(\tau_\alpha x)=-\Delta_\alpha, \qquad (\sigma_\beta y)\cdot(\tau_\beta y)=-\Delta_\beta, \qquad (\sigma_\gamma z)\cdot(\tau_\gamma z)=-\Delta_\gamma.$$

Die dritte Gleichung ist dann eine Folge der beiden ersten, und die Unbestimmtheit beschränkt sich auf die willkürliche Annahme von zwei der konstanten Faktoren, aus denen sich die übrigen durch die Bedingungen berechnen lassen:

$$\mu_\alpha \mu_\beta \mu_\gamma = 1, \quad \nu_\alpha = \frac{1}{\mu_\alpha}, \quad \nu_\beta = \frac{1}{\mu_\beta}, \quad \nu_\gamma = \frac{1}{\mu_\gamma}. \tag{4}$$

Man sieht hieraus, daß die Invarianten $(\sigma_\alpha \tau_\alpha)$, $(\sigma_\beta \tau_\beta)$, $(\sigma_\gamma \tau_\gamma)$ völlig bestimmte Werte erhalten, und zwar ergeben sich mit Hilfe der Gleichungen (3), also aus den Gleichungen

$$(\sigma_\alpha x)\cdot(\sigma_\beta y)\cdot(\sigma_\gamma z) + (\tau_\alpha x)\cdot(\tau_\beta y)\cdot(\tau_\gamma z) = Q, \tag{5}$$

$$(\sigma_\alpha x)\cdot(\sigma_\beta y)\cdot(\sigma_\gamma z) - (\tau_\alpha x)\cdot(\tau_\beta y)\cdot(\tau_\gamma z) = \sqrt{-R}\,P \tag{6}$$

zunächst vier Wertsysteme, von denen sich aber nur eins als möglich erweist:

$$(\sigma_\alpha \tau_\alpha) = (\sigma_\beta \tau_\beta) = (\sigma_\gamma \tau_\gamma) = -\sqrt{-R}. \tag{7}$$

Es hat sich mithin folgendes gezeigt:

Jede reguläre trilineare Form P bestimmt ein aus ihr und der zugehörigen Form Q gebildetes syzygetisches Büschel. Dabei läßt sich das Formenpaar $\sqrt{-R}\,P$ und Q darstellen als Differenz und Summe zweier Produkte von drei Linearfaktoren, und zwar der beiden getrennten „vollständig reduziblen" Formen des Büschels. Diese Art singulärer trilinearer Formen wird uns später noch näher beschäftigen, es sei hier nur hervorgehoben, daß für sie die Zeichen α, β, γ selbständige Bedeutung haben, woraus das identische Verschwinden aller weiteren Kovarianten und Invarianten unmittelbar folgt — wie es sich auch in bezug auf unsere Formen $(\sigma_\alpha x)\cdot(\sigma_\beta y)\cdot(\sigma_\gamma z)$, $(\tau_\alpha x)\cdot(\tau_\beta y)\cdot(\tau_\gamma z)$ herausstellt. Wir nennen sie die „Grundformen" des Büschels $(kP + \lambda Q)$. Sie selbst sind irrationale, ihre Summe und ihr Produkt rationale Kovarianten der gegebenen Form P. Sie sind nämlich Wurzeln der quadratischen Gleichung

$$X^2 - QX + \Delta_\alpha \cdot \Delta_\beta \cdot \Delta_\gamma = 0,$$

in der die Grad- und Ordnungszahlen der Koeffizienten arithmetische Reihen bilden. — Überdies zeigen die Darstellungen (5) und (6), daß sie die Doppelelemente der in dem syzygetischen Büschel zwischen den Formen $P_{k\lambda}$ und $Q_{k\lambda}$ bestehenden involutorischen Zuordnung bilden. Ihre Parameter sind die Nullstellen der Linearfaktoren, in die sich die drei quadratischen Formen Δ_α, Δ_β, Δ_γ zerlegen lassen.

II. $R = 0$, $Q \not\equiv 0$ charakterisiert die erste Klasse der singulären Formen, die, wie sich sogleich zeigt, noch irreduzibel sind. Durch einen

geeigneten Grenzübergang ergibt sich nämlich für sie aus der Gleichung (6) die charakteristische Darstellung

$$(8) \qquad P = (\tau_\alpha x)\cdot(\sigma_\beta y)\cdot(\sigma_\gamma z) + (\sigma_\alpha x)\cdot(\tau_\beta y)\cdot(\sigma_\gamma z) + (\sigma_\alpha x)\cdot(\sigma_\beta y)\cdot(\tau_\gamma z).$$

Die Gleichung $R = 0$ sagt aus, daß die Gesamtheit der Formen der vorliegenden Klasse eine sechsdimensionale Mannigfaltigheit vierten Grades bilden, die sich nach (8) als Ort der Tangenten an die Mannigfaltigkeit der vollständig reduziblen Formen darstellt. Das wird bestätigt, wenn wir auch hier versuchen, syzygetische Büschel aufzustellen. Dann ergibt sich aus der Relation (1), daß die Form Q hier in das Produkt der drei Linearfaktoren zerfällt, die zugleich die Linearfaktoren der — für diesen Fall — vollständigen Quadrate Δ_α, Δ_β, Δ_γ sind. Q ist also eine vollständig reduzible Form, und die zwischen P und Q oben festgestellte involutorische Zuordnung ist ausgeartet. Das Büschel $kP + \lambda Q$ ist ein spezielles Büschel von nur singulären Formen geworden, für welches die „Grundformen" mit Q zusammenfallen. Wir sagen: es sei aus zwei „konsekutiven" vollständig reduziblen Formen abgeleitet. Das Invariantensystem des syzygetischen Büschels nimmt jetzt folgende vereinfachte Gestalt an:

$$(9) \qquad \begin{gathered} P_{k\lambda} = kP + \lambda Q, \\ Q_{k\lambda} = k^3 Q, \\ \Delta^\alpha_{k\lambda} = k^2 \Delta_\alpha, \quad \Delta^\beta_{k\lambda} = k^2 \Delta_\beta, \quad \Delta^\gamma_{k\lambda} = k^2 \Delta_\gamma, \\ R_{k\lambda} = 0. \end{gathered}$$

III. Weitere Möglichkeiten der Spezialisierung sind nunmehr gegeben durch das identische Verschwinden von Q und einer oder mehrerer der Formen Δ (woraus natürlich immer $R = 0$ folgt). Es gilt nun folgendes:

1. Wenn $Q \equiv 0$ ist, so ist immer mindestens eine der Formen $\Delta \equiv 0$ — eine unmittelbare Folge aus der Relation (1).

2. Wenn eine der Formen Δ z. B. $\Delta_\alpha \equiv 0$ ist, so ist mindestens noch $\Delta_\beta \cdot \Delta_\gamma \equiv 0$.

Diese letzte Behauptung folgt aus einer leicht zu berechnenden Beziehung:

$$(10) \qquad (\delta_\beta y)^2 \cdot (\delta_\gamma z)^2 = -(\delta_\alpha \alpha)(\delta_\alpha \alpha')(\beta y)(\gamma z)(\beta' y)(\gamma' z)$$

und läßt sich in den Satz fassen:

Es ist nicht möglich, daß für eine singuläre trilineare Form nur eine der quadratischen Formen Δ identisch verschwindet.

Schließen wir also zunächst den Fall $\Delta_\alpha \equiv 0$, $\Delta_\beta \equiv 0$, $\Delta_\gamma \equiv 0$ aus, so haben wir demnach noch drei Möglichkeiten, deren eine ist:

$$\Delta_\alpha \not\equiv 0, \quad \Delta_\beta \equiv 0, \quad \Delta_\gamma \equiv 0.$$

Offenbar muß die Form P jetzt in ein Produkt von zwei Faktoren zerfallen, derart, daß ein Linearfaktor in x den Ausdruck für jedes y und jedes z ausarten läßt, während ein nicht singulärer Bilinearfaktor in y und z für das Erfülltsein der Ungleichung $\Delta_\alpha \not\equiv 0$ Sorge trägt:

$$P = (\sigma_\alpha x)\cdot(\sigma_\beta y)\,(\sigma_\gamma z). \tag{11}$$

Von dieser Form läßt sich ohne weiteres auf eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit der vorliegenden Klasse schließen. Jedoch können wir hier nicht mehr jeder einzelnen Form ein bestimmtes syzygetisches Büschel zuordnen. Da sich vielmehr jede von ihnen auf ∞^2 Weisen in eine Summe von zwei vollständig reduziblen Formen zerlegen läßt:

$$P = (\sigma_\alpha x)\cdot\{(\sigma'_\beta y)\cdot(\sigma'_\gamma z) + (\sigma''_\beta y)\cdot(\sigma''_\gamma z)\} \qquad \left\{\begin{matrix}(\sigma'_\beta \sigma''_\beta) \neq 0\\ (\sigma'_\gamma \sigma''_\gamma) \neq 0\end{matrix}\right\}, \tag{12}$$

so entsprechen ihr auch ∞^2 Büschel. Allerdings nennen wir auch sie noch syzygetische Büschel, und zwar deshalb, weil sie sich im allgemeinen als Grenzfälle der Büschel unter I, und ∞^1 von ihnen, die einen Kegel bilden, als Grenzfälle der Büschel unter II auffassen lassen, je nachdem wir die Zerlegung in die zwei Summanden gestalten. Von einer involutorischen Zuordnung der Formen P und Q läßt sich natürlich hier nicht sprechen.

IV. $R = 0$, $\Delta_\alpha \equiv 0$, $\Delta_\beta \equiv 0$, $\Delta_\gamma \equiv 0$ sind die Bedingungsgleichungen für die Klasse der vollständig reduziblen Formen. Diese zerfallen in ein Produkt von je drei Linearfaktoren

$$P = (\sigma_\alpha x)\cdot(\sigma_\beta y)\cdot(\sigma_\gamma z), \tag{13}$$

woraus sich unmittelbar auf Dreidimensionalität der zugehörigen Mannigfaltigkeit schließen läßt. Dabei liegt offenbar in diesem Fall jede Form P in ∞^3 „syzygetischen Büscheln", da sie sich mit jeder anderen derselben Klasse zu einem solchen verbinden läßt. Zu diesen ∞^3 Büscheln gehören als Grenzfälle ∞^2 Tangentenbüschel und außerdem sind darunter drei singuläre Büschel von vollständig reduziblen Formen.

Hiermit haben wir eine erschöpfende Klassifikation der Gesamtheit der trilinearen Formen vor uns.

Ich behaupte, die so definierten Klassen haben die Eigenschaft, daß jede beliebige trilineare Form durch nicht singuläre lineare Transformationen der drei binären Gebiete in jede beliebige Form derselben Klasse, aber auch nur in eine solche übergeht, m. a. W.:

Die Formen der einzelnen Klassen sind unter sich äquivalent.

Diese Behauptung ist bewiesen, wenn es uns gelingt, für jede einzelne der sechs Klassen eine charakteristische kanonische Darstellung anzugeben, was in der Tat durch entsprechende Substitutionen ohne Schwierigkeiten möglich ist. Sie gestalten sich folgendermaßen:

I. Kanonische Darstellung der regulären trilinearen Formen:

$$(14)\qquad \begin{gathered} P = x_2 y_2 z_2 - x_1 y_1 z_1, \qquad Q = x_2 y_2 z_2 + x_1 y_1 z_1, \\ \Delta_\alpha = -x_1 x_2, \quad \Delta_\beta = -y_1 y_2, \quad \Delta_\gamma = -z_1 z_2, \\ R = -1. \end{gathered}$$

II. Kanonische Darstellung der singulären, nicht reduziblen Formen:

$$(15)\qquad \begin{gathered} P = x_1 y_2 z_2 + x_2 y_1 z_2 + x_2 y_2 z_1, \qquad Q = x_2 y_2 z_2, \\ \Delta_\alpha = -x_2^2, \quad \Delta_\beta = -y_2^2, \quad \Delta_\gamma = -z_2^2, \\ R = 0. \end{gathered}$$

III. Kanonische Darstellung der singulären, teilweise reduziblen Formen:

$$(16)\qquad \begin{gathered} P = x_1(y_1 z_2 - y_2 z_1), \quad Q \equiv 0, \\ \Delta_\alpha = x_1^2, \quad \Delta_\beta \equiv 0, \quad \Delta_\gamma \equiv 0, \\ R = 0. \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} P = y_1(z_1 x_2 - z_2 x_1), \quad Q \equiv 0, \\ \Delta_\alpha \equiv 0, \quad \Delta_\beta = y_1^2, \quad \Delta_\gamma \equiv 0, \\ R = 0. \end{gathered}$$

$$\begin{gathered} P = z_1(x_1 y_2 - x_2 y_1), \quad Q \equiv 0, \\ \Delta_\alpha \equiv 0, \quad \Delta_\beta \equiv 0, \quad \Delta_\gamma = z_1^2, \\ R = 0. \end{gathered}$$

IV. Kanonische Darstellung der singulären, vollständig reduziblen Formen:

$$(17)\qquad \begin{gathered} P = x_1 y_1 z_1, \quad Q \equiv 0, \\ \Delta_\alpha \equiv 0, \quad \Delta_\beta \equiv 0, \quad \Delta_\gamma \equiv 0, \\ R = 0. \end{gathered}$$

§ 3.

Geometrische Deutung im R_7.

Wir legen der geometrischen Untersuchung der trilinearen Formen die Abbildung aller dieser Formen auf den siebendimensionalen projektiven Punktraum zugrunde, indem wir die Koeffizienten einer solchen Form als homogene Punktkoordinaten deuten. Dann entspricht jeder trilinearen

Form ein bestimmter Punkt des R_7, der, wie wir sagen, die trilineare Form darstellt. Da wir proportionale Formen nicht unterscheiden, so haben wir eine eineindeutige Abbildung der Korrespondenzen $(\alpha x)(\beta y)(\gamma z) = 0$ auf den R_7 vor uns.

Es ist zu untersuchen, auf welche Weise die singulären Formen oder Korrespondenzen darin zur Darstellung kommen. Der Ausgangspunkt sei die dreidimensionale Mannigfaltigkeit der vollständig reduziblen Formen, von der sich zeigen läßt — was wir jedoch hier übergehen wollen, — daß ihre Ordnungszahl sechs ist — wir reden also von einer M_3^6.

Diese M_3^6 bleibt in Ruhe bei einer Gruppe von $6 \cdot \infty^9$ Kollineationen des R_7, die eine kontinuierliche invariante Untergruppe von ∞^9 Transformationen besitzt, eine G_9, welche das Bild des direkten Produkts der Transformationsgruppen G_3^α, G_3^β, G_3^γ der drei getrennten binären Gebiete mit den Parametern α, β, γ ist und die wir mithin auch als direktes Produkt $G_3^\alpha \cdot G_3^\beta \cdot G_3^\gamma$ darstellen können. Es verlaufen nämlich auf der M_3^6 drei Scharen von je ∞^2 Geraden, die wir der Reihe nach mit S_α, S_β, S_γ bezeichnen wollen und deren jede dieselbe Struktur hat wie die Schar der Paare von Punkten aus zwei binären Gebieten oder die Gesamtheit der Punkte einer nicht singulären Fläche zweiter Ordnung im Raum von drei Dimensionen. Die Geraden dieser drei Erzeugendenscharen aber werden durch drei entsprechende Scharen von je ∞^1 dreidimensionalen Räumen projektiv aufeinander bezogen, so daß uns diese, die wir weiter unten noch näher zu besprechen haben, hier schon als Trägerinnen der drei binären Gebiete entgegentreten.

Da also die drei Gruppen G_3 isomorph zur Gruppe des binären Gebietes sind und außerdem die Eigenschaft besitzen, daß z. B. die Gruppe G_3^α jede Gerade der Schar S_α als Ganzes in Ruhe läßt, dagegen die Geraden der Schar S_β, ebenso wie die von S_γ untereinander und zwar dreigliedrig vertauscht, so bilden sie zusammen *ein Analogon zu den Schiebungsgruppen einer nicht singulären Fläche zweiter Ordnung.*

Denken wir uns nun die Geraden der Scharen S_β und S_γ auf ∞^1 Flächen zweiter Ordnung verteilt, wobei jedem Parameterwert α eine solche Fläche entspricht, so liegen diese in ∞^1 dreidimensionalen Räumen, deren Punkte zusammen eine M_4^4 erfüllen — eine vierdimensionale Mannigfaltigkeit von der vierten Ordnung. Die drei so entstehenden derartigen Mannigfaltigkeiten enthalten u. a. die Bilder der singulären Formen, die den drei Klassen III_α, III_β, III_γ angehören, und zwar vollzieht sich die Abbildung der mit gleichem Linearfaktor versehenen trilinearen Formen der Klassen III ebenso, wie sich die Gesamtheit der bilinearen Formen in dem R_3 darstellen läßt. Insbesondere entspricht den ∞^2 syzygetischen Büscheln zu einer Form P das in dem zugehörigen R_3 durch den Punkt P als Träger ge-

legte Strahlenbündel. Die Flächen zweiter Ordnung, von denen wir ausgingen, sind die Diskriminantenflächen in den R_3. Da diese durch die Geraden der Schar S_α kollinear aufeinander bezogen sind, so sind auch die Räume selbst durch die Geraden und umgekehrt die Geraden durch die Räume kollinear (projektiv) aufeinander bezogen.

Es existiert jedoch noch eine zweite Weise, die genannten M_4^4 zu konstruieren, indem wir nämlich je zwei der durch die Punkte der M_3^6 hindurchgehenden Erzeugenden durch eine Ebene verbinden. Diese Ebenen sind Tangentenebenen an die obigen Flächen zweiter Ordnung, sie beschreiben daher die vierdimensionalen Räume, in denen die Flächen liegen, und führen so wiederum zu denselben Mannigfaltigkeiten M_4^4.

Jede dieser drei M_4^4 gestattet eine kontinuierliche Gruppe von ∞^{18} Kollineationen, eine G_{18}, die das direkte Produkt einer der zuvor beschriebenen Schiebungsgruppen von ∞^3 Transformationen und der 15 gliedrigen Gruppe aller Kollineationen in einem dreidimensionalen projektiven Punktraum ist. Auch diese Gruppe ist ein Analogon zur Gruppe der eigentlich-automorphen Transformationen einer Fläche zweiter Ordnung. Offenbar schneiden sich die drei Gruppen $G_{18}^{(\alpha)}$, $G_{18}^{(\beta)}$, $G_{18}^{(\gamma)}$ in der G_9. Ebenso aber, wie das Schnittgebilde schon zweier der drei Mannigfaltigkeiten M_4^4 die M_3^6 bestimmt, so genügt es auch, je zwei der G_{18} zum Schnitt zu bringen, um die G_9 zu erzeugen.

Wir wenden uns jetzt der II. Klasse der trilinearen Formen zu. Wir konstruieren in jedem Punkt der M_3^6 aus den durch ihn hindurchgehenden Erzeugenden den zugehörigen dreidimensionalen Tangentialraum, was immer möglich ist, da die drei Erzeugenden nie in einem Büschel liegen. Die Gesamtheit dieser Räume erfüllt, wie die charakteristische Gleichung der Formenklasse II $R = 0$ zeigt, eine M_6^4. Die so entstehende Tangentenmannigfaltigkeit der M_3^6 umfaßt also

1. die Punkte der M_3^6,

2. die Punkte der drei M_4^4, die nicht auf der M_3^6 liegen,

3. die hiermit noch nicht aufgezählten Punkte der ∞^3 Tangentialräume an die M_3^6 als Bilder von Formen der Klasse II. Die M_3^6 verläuft als singuläre Mannigfaltigkeit auf der M_6^4, aus deren Doppelpunkten sie besteht. Dagegen ist sie nicht singulär auf den drei M_4^4 der Klassen III, die in ihr zum Durchschnitt kommen.

Die M_6^4 ist mithin der Ort von *vier* Scharen dreidimensionaler Räume:

1. der drei Scharen von je ∞^1 Räumen, deren jede eine der Mannigfaltigkeiten M_4^4 erzeugt, wobei jede Schar Trägerin eines binären Gebietes ist,

2. einer Schar von ∞^3 dreidimensionalen Räumen, die umkehrbar-ein-

deutig auf die Mannigfaltigkeit M_3^6 bezogen ist und deren Punkte die ganze M_6^4 erfüllen.

Durch jeden Punkt der M_6^4, der keiner der M_4^4 angehört, geht eine Gerade, die ganz auf der M_6^4 verläuft und die M_3^6 berührt. Sie ist eine der Tangenten an die M_3^6, die nicht in einem der drei M_4^4 verlaufen und damit der Ort der Bildpunkte eines syzygetischen Tangentenbüschels der II. Klasse trilinearer Formen.

Endlich bleibt uns noch, von den Bisekanten der M_3^6 zu sprechen, die nicht zugleich Tangenten sind und also zwei getrennte Punkte der M_3^6 verbinden. Die Punkte dieser Bisekanten erfüllen den ganzen R_7 mit Ausschluß der zuvor beschriebenen Punkte, die auf der M_6^4, aber nicht auf der M_3^6 liegen. Wir haben analytisch gezeigt, daß durch jeden Punkt des R_7, solange er nicht der M_6^4 angehört, gerade eine Bisekante an die M_3^6 geht, die das Bild des zu P gehörenden syzygetischen Büschels ist. Nennen wir, den „Grundformen" entsprechend, die Schnittpunkte der Bisekanten mit der M_3^6 die „Grundpunkte", so bilden diese mit jedem auf derselben Geraden liegenden Punktepaar P, Q ein harmonisches Quadrupel.

§ 4.

Das Nullsystem im R_7.

Zwei trilineare Formen $(\alpha x)(\beta y)(\gamma z)$ und $(\alpha' x)(\beta' y)(\gamma' z)$ sollen zueinander konjugiert heißen, wenn zwischen ihnen die Beziehung besteht

$$(\alpha\alpha')(\beta\beta')(\gamma\gamma') = 0.$$

Diese Gleichung ist linear in den Koeffizienten beider Formen oder auch den Koordinaten der zugehörigen Bildpunkte im R_7, so daß einem beliebig vorgegebenen Punkt P des R_7 ein stets bestimmter linearer R_6 zugeordnet ist als Ort der zu P „konjugierten Bildpunkte". Es ist also immer durch sechs linear-unabhängige Formen (abgesehen von einem numerischen Faktor) eine siebente bestimmt, die der durch die sechs Formen gegebenen linearen Mannigfaltigkeit selbst angehört. Damit ist eine involutorische Korrelation im R_7 definiert, die die Eigenschaft eines Nullsystems hat: jedem Punkt P des R_7 entspricht ein durch ihn hindurchgehender R_6 und jedem R_6 ein in ihm liegender Punkt.

Angenommen nun, PP' sei ein Paar konjugierter Punkte, dann wird offenbar der Geraden $\overline{PP'}$ durch das Nullsystem ein R_5 zugeordnet, der sie enthält. Wir nennen eine solche Gerade Leitgerade des Nullsystems. Entsprechend heißt Leitebene, Leitraum von drei Dimensionen eine Ebene, der ein sie enthaltender R_4, und ein Raum, der sich selbst zugeordnet ist. Dann ist leicht zu bestimmen, daß es ∞^{11} Leitgeraden, ∞^{12} Leitebenen, ∞^{10} Leiträume von drei Dimensionen gibt. Insbesondere sind unter den

Leitgeraden die sämtlichen ∞^5 Tangenten an unsere M_3^6, da zwei Punkte $P = (\alpha x)\cdot(\beta y)\cdot(\gamma z)$ und $P' = (\alpha' x)\cdot(\beta y)\cdot(\gamma z) + (\alpha x)\cdot(\beta' y)\cdot(\gamma z) + (\alpha x)\cdot(\beta y)\cdot(\gamma' z)$ immer zueinander konjugiert sind. Wir sagen:

Die Mannigfaltigkeit M_3^6 liegt in dem Nullsystem.

Die sämtlichen dreidimensionalen linearen Tangentialräume an die M_3^6 werden nämlich durch das Nullsystem mit sich selbst gepaart.

Die M_3^6 ist eine Integralmannigfaltigkeit von höchstmöglicher Dimension der Pfaffschen Gleichung, die zu dem Nullsystem gehört. Es würde sich zeigen lassen, daß sie eine von ∞^{27} gleichberechtigten M_3^6 ist, die alle dreidimensionale Integralmannigfaltigkeiten derselben Pfaffschen Gleichung sind.

Eine bilineare Form $(by)(cz)$ heißt nun zu einer trilinearen Form $(\alpha x)(\beta y)(\gamma z)$ „apolar", wenn die zweite Überschiebung $(\alpha x)(\beta b)(\gamma c)$ identisch gleich Null ist.

Ebenso nennen wir eine lineare Form (ax) zu $(\alpha x)(\beta y)(\gamma z)$ „apolar", wenn der Ausdruck $(\alpha a)(\beta y)(\gamma z)$ identisch verschwindet.

Sei uns jetzt ein Punkt P allgemeiner Lage $\{R \neq 0\}$ als Bild der Form $(\alpha x)(\beta y)(\gamma z)$ gegeben, so wollen wir nach allen bilinearen Formen $(by)(cz)$ fragen, die zu der gegebenen trilinearen Form $(\alpha x)(\beta y)(\gamma z)$ apolar sind. Da die Koeffizienten dieser Formen zwei linearen Gleichungen

$$\alpha_1(\beta b)(\gamma c) = 0, \qquad \alpha_2(\beta b)(\gamma c) = 0 \tag{18}$$

zu genügen haben, so werden sie, wenn diese beiden Gleichungen linear-unabhängig sind, ein Büschel bilden. Nun war $R \neq 0$ vorausgesetzt. Es kann also die Form $(\alpha x)(\beta y)(\gamma z)$ in Gestalt der uns bekannten Summe

$$(\sigma_\alpha x)\cdot(\sigma_\beta y)\cdot(\sigma_\gamma z) - (\tau_\alpha x)\cdot(\tau_\beta y)\cdot(\tau_\gamma z)$$

dargestellt werden, und wir haben dann in

$$\begin{aligned}(by)(cz) &= (\sigma_\beta y)\cdot(\tau_\gamma z),\\ (by)(cz) &= (\tau_\beta y)\cdot(\sigma_\beta z)\end{aligned} \tag{19}$$

zwei linear-unabhängige Lösungen unseres Gleichungssystems, aus denen sich die allgemeine Lösung in der Form

$$\lambda(\sigma_\beta y)\cdot(\tau_\gamma z) + \mu(\tau_\beta y)\cdot(\sigma_\gamma z)$$

zusammensetzt.

$$(ax)\cdot\{\lambda(\sigma_\beta y)\cdot(\tau_\gamma z) + \mu(\tau_\beta y)\cdot(\sigma_\gamma z)\} \tag{20}$$

ist dann eine trilineare Form, die zu $(\alpha x)(\beta y)(\gamma z)$ konjugiert ist. Diese Formen sind aber nicht nur zu der vorgelegten Form konjugiert, sondern zu allen Formen des zugehörigen syzygetischen Büschels. Ihre Bildpunkte erfüllen eine nicht singuläre Fläche zweiter Ordnung, deren eine Schar

von Erzeugenden aus „*Transversalen*“ der linearen Räume der drei M_4^4, d. h. aus den Bildern singulärer, teilweiser reduzibler Formen mit gleichem Bilinearfaktor, aber variierendem Linearfaktor besteht; darunter sind zwei ausgezeichnete Transversalen, die zugleich Erzeugende der M_3^6 sind. Die zweite Schar von Erzeugenden derselben Fläche besteht aus geraden Linien, deren jede in einem ebenen R_3 der die Mannigfaltigkeit $M_{\alpha 4}^4$ erzeugenden eindimensionalen Schar linearer Räume verläuft.

Wir achten jetzt besonders auf den hier hervorgetretenen Umstand, daß zu jedem syzygetischen Büschel der Klasse I dreimal zwei gerade Linien auf der M_3^6 gehören, die zusammengenommen die Bildpunkte aller vollständig reduziblen trilinearen Formen $(a\,x)\cdot(b\,y)\cdot(c\,z)$ tragen, die zu der Form des syzygetischen Büschels konjugiert sind. Es sind das nämlich die folgenden Formen:

$$(a\,x)\cdot(b\,y)\cdot(c\,z) =$$

$$(21)\qquad \begin{aligned} &= (a\,x)\cdot(\sigma_\beta\,y)\cdot(\tau_\gamma\,z), && = (a\,x)\cdot(\tau_\beta\,y)\cdot(\sigma_\gamma\,z),\\ &= (\tau_\alpha\,x)\cdot(b\,y)\cdot(\sigma_\gamma\,z), && = (\sigma_\alpha\,x)\cdot(b\,y)\cdot(\tau_\gamma\,z),\\ &= (\sigma_\alpha\,x)\cdot(\tau_\beta\,y)\cdot(c\,z), && = (\tau_\alpha\,x)\cdot(\sigma_\beta\,y(\cdot(c\,z). \end{aligned}$$

Nunmehr bemerken wir, daß diese sechs Geraden sich zu einem Sechsseit zusammenschließen, denn jede von ihnen wird — wie man aus ihren Parametern ohne weiteres ersieht — von zwei anderen, aber auch nur von zweien geschnitten und zwar derart, daß je zwei gegenüberliegende Seitenpaare des Sechsseits derselben Erzeugendenschar der M_3^6 angehören (Fig. 1).

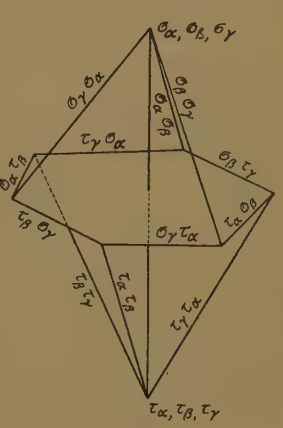


Fig. 1.

Dieses Sechsseit ist die Schnittfigur der M_3^6 mit dem R_5, der in unserem Nullsystem dem Bilde des syzygetischen Büschels entspricht, dem die gegebene trilineare Form angehört.

Irgendein linearer R_5 aber wird die M_3^6 in einer Kurve M_1^6 schneiden. Die hier entstehende Kurve hat sechs Doppelpunkte, und sie ist in sechs Geraden zerfallen, die eben unser Sechsseit bilden. Durch sie ist der genannte R_5 eindeutig bestimmt, da wir zeigen können, daß die Eckpunkte des Sechsseits voneinander linear unabhängig sind.

Damit sei der allgemeine Fall erledigt. Von den Grenzfällen soll nur der eine kurz erwähnt werden, daß der Punkt P auf die Mannigfaltigkeit R rückt, ohne einer der M_4^4 oder der M_3^6 anzugehören. Es geht dann unser Sechsseit in ein doppelt umlaufenes (ausgeartetes) Dreiseit

über, welches gebildet wird von den Erzeugenden der M_3^6 durch den Berührungspunkt der von P aus an die M_3^6 gelegten Tangente.

Auch dieses Dreiseit ist einmal der Ort der zu P konjugierten trilinearen Formen und zugleich die Schnittfigur der M_3^6 mit dem R_5, der dem zu P gehörenden syzygetischen Büschel entspricht. Die M_3^6 und der genannte R_5 berühren sich in ihm.

Von der Betrachtung weiterer Spezialfälle wollen wir absehen.

§ 5.

Die trilineare Nullform.

Wir wenden uns nunmehr sogleich dem dritten Fall zu, in dem alle drei Veränderlichen x, y und z gleichmäßig transformiert werden sollen, und gehen aus von der eindeutigen Clebsch-Gordanschen Reihenentwicklung der trilinearen Form:

$$(22)\qquad \begin{aligned}(\alpha x)(\beta y)(\gamma z) &= (rx)(ry)(rz)\\ &+\frac{1}{3}\{(yz)\cdot(\beta\gamma)(\alpha x)+(zx)\cdot(\gamma\alpha)(\beta y)+(xy)\cdot(\alpha\beta)(\gamma z)\}.\end{aligned}$$

Das erste Glied rechts ist die Polare einer kubischen Form $(rx)^3$, das zweite Glied eine nach H. Wiener so genannte „Nullform", die für $x = y = z$ identisch verschwindet.

Die Nullform liefert, da sie von drei linearen Formen abhängt, deren Summe Null ist, nur ebenso viele Invarianten wie die drei linearen Formen, nämlich eine:

$$(23)\qquad J = (\varrho_\beta \varrho_\gamma) = (\varrho_\gamma \varrho_\alpha) = (\varrho_\alpha \varrho_\beta),$$

wenn wir

$$(24)\qquad (\varrho_\alpha t) = (\beta\gamma)(\alpha t), \quad (\varrho_\beta t) = (\gamma\alpha)(\beta t), \quad (\varrho_\gamma t) = (\alpha\beta)(\gamma t)$$

setzen. Das simultane System der kubischen und der Nullform ist identisch mit dem simultanen System der kubischen Form $(rt)^3$ und zweier der linearen Formen $(\varrho_\alpha t)$, $(\varrho_\beta t)$, $(\varrho_\gamma t)$. Es kann also ohne weiteres hingeschrieben werden. Daher gehen wir sogleich zur geometrischen Deutung der Nullform über. Den Grundgedanken für diese Deutung hat im allgemeinen Fall H. Wiener gegeben, doch liegt uns daran, sämtliche Möglichkeiten zu umfassen und für die einzelnen Fälle die analytischen Kriterien zu haben.

Dazu empfiehlt sich zunächst, statt der Formen $(\varrho_\alpha t)$, $\varrho_\beta t)$, $(\varrho_\gamma t)$ drei andere (at), (bt), (ct) einzuführen, die mit ihnen durch die Gleichungen

$$(25)\qquad \begin{aligned}(at) &= (\varrho_\beta t) - (\varrho_\gamma t),\\ (bt) &= (\varrho_\gamma t) - (\varrho_\alpha t),\\ (ct) &= (\varrho_\alpha t) - (\varrho_\beta t)\end{aligned}$$

erbunden sind. Diese drei Formen genügen dann ebenso wie die drei ϱt) der identischen Gleichung

26) $$(at) + (bt) + (ct) \equiv 0 .$$

Es gilt nun folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

1. $J \neq 0$. Unter dieser Bedingung läßt sich zeigen, daß zwischen en drei in t quadratischen Formen

$$(at)\cdot(xt), \qquad (bt)\cdot(yt), \qquad (ct)\cdot(zt)$$

ine lineare Abhängigkeit besteht, so daß, wenn außer a, b, c auch x, y, z oneinander verschieden sind, die a und x, b und y, c und z drei Paare iner Involution bilden.

Wählen wir deshalb als Trägerin des binären Gebietes eine beliebige, icht singuläre Kurve zweiter Ordnung, so annullieren die Nullform alle ripel x, y, z, die so gelegen sind, daß ie Geraden $\overline{ax}$, $\overline{by}$, $\overline{cz}$ durch denselben unkt gehen. Das trifft natürlich immer ann zu, wenn x, y, z zusammenfallen Fig. 2). Die Nullstellen ϱ_α, ϱ_β, ϱ_γ der rsprünglichen drei linearen Formen sind ie drei Punkte, die a, b, c zu harmo- ischen Quadrupeln ergänzen.

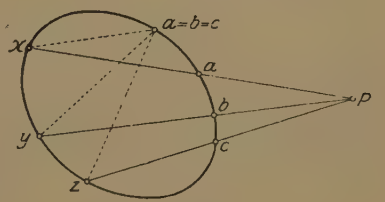


Fig. 2.

2. $J = 0$. In diesem Fall muß sich außer (26) eine zweite identisch erschwindende lineare Kovariante der Formen (at), (bt), (ct) angeben assen, derart, daß die Quotienten ihrer Koeffizienten absolute Invariante egenüber linearen Transformationen sind und diese Koeffizienten selbst ie Summe Null haben. Wir setzen sie in folgender Form an:

27) $$e_\alpha(at) + e_\beta(bt) + e_\gamma(ct) \equiv 0 ,$$

28) $$e_\alpha + e_\beta + e_\gamma = 0 .$$

Hieraus aber und aus der Relation (26) folgt, daß nicht nur (at), $bt)$, (ct) Multipla einer einzigen Form (ϱt) sind:

29) $$\begin{aligned} (at) &= \lambda_\alpha(\varrho t), \\ (bt) &= \lambda_\beta(\varrho t), \\ (ct) &= \lambda_\gamma(\varrho t), \end{aligned}$$

ondern, da

$$\lambda_\alpha + \lambda_\beta + \lambda_\gamma = 0 ,$$

lso

$$e_\alpha\lambda_\alpha + e_\beta\lambda_\beta + e_\gamma\lambda_\gamma = 0$$

der

$$\lambda_\alpha : \lambda_\beta : \lambda_\gamma = e_\beta - e_\gamma : e_\gamma - e_\alpha : e_\alpha - e_\beta$$

ist, daß das entsprechende auch für die Formen $(\varrho_\alpha t)$, $(\varrho_\beta t)$, $(\varrho_\gamma t)$ gilt:

$$(30)\qquad \begin{aligned}(\varrho_\alpha t) &= e_\alpha(\varrho t),\\ (\varrho_\beta t) &= e_\beta(\varrho t),\\ (\varrho_\gamma t) &= e_\gamma(\varrho t).\end{aligned}$$

Es bestehen dann wiederum zwei Möglichkeiten:

a) Keines der $\lambda_\alpha, \lambda_\beta, \lambda_\gamma$ ist $= 0$;

dann folgt aus (26) und (29), daß der Wurf der vier Punkte ϱ, x, y, z, wenn diese alle voneinander verschieden sind, sich bei beliebiger linearer Transformation nicht ändert; z. B. wird das Doppelverhältnis

$$D = (\varrho, x, y, z) = \frac{(\varrho y)\cdot(xz)}{(\varrho z)\cdot(xy)} = \frac{e_\gamma - e_\alpha}{e_\beta - e_\alpha} = (\infty, e_\alpha, e_\beta, e_\gamma).$$

Es läßt sich nämlich in diesem Fall unsere Nullform auf den Ausdruck bringen:

$$(e_\beta - e_\alpha)\cdot(zx)\cdot(\varrho y) + (e_\gamma - e_\alpha)\cdot(xy)\cdot(\varrho z),$$

woraus das Gesagte unmittelbar folgt.

Insbesondere erhält man, wenn der Reihe nach $e_\alpha, e_\beta, e_\gamma$ gleich Null sind, die harmonischen Doppelverhältnisse

$$D = -1, 2, \tfrac{1}{2},$$

und, wenn sich $(\varrho_\alpha t)$, $(\varrho_\beta t)$, $(\varrho_\gamma t)$ wie dritte Einheitswurzeln verhalten, die äquianharmonischen Doppelverhältnisse

$$D = -\varepsilon, \quad -\varepsilon^2 \qquad \left(\varepsilon = \frac{-1 \pm \sqrt{-3}}{2}\right).$$

b) Eines der λ ist Null, z. B. $\lambda_\alpha = 0$;

dann sind $(\varrho_\beta t)$ und $(\varrho_\gamma t)$ einander gleich, und unsere Nullform lautet

$$-(yz)\cdot(\varrho x).$$

Dabei entsprechen der Reihe nach der Annahme $\lambda_\alpha = 0$, $\lambda_\beta = 0$, $\lambda_\gamma = 0$ die Werte $D = 1, 0, \infty$. Andere Werte kann in diesem Fall das Doppelverhältnis nicht annehmen.

Ich verweise zum Schluß noch kurz auf eine interessante gruppentheoretische Verwertung unserer Reihenentwicklung der trilinearen Form auf die Ähnlichkeit der automorphen Transformationsgruppe der Raumkurve dritter Ordnung und einer einseitigen Schiebungsgruppe einer nicht singulären Fläche zweiter Ordnung. Schon Sophus Lie[4]) hat diese Beziehung gekannt, die eins der schönsten Beispiele zu seinem Begriff *ähn-*

[4]) S. Lie, Vorlesungen über kontinuierliche Gruppen, Kap. 17, § 2.

licher reziproker Gruppen liefert, doch ist sie erst später von A. B. Coble[5]) auf eine den Anforderungen der Algebra genügenden Art behandelt worden. Coble benutzt die aus der Reihenentwicklung folgende Tatsache, daß im Gebiet achter Stufe, das den trilinearen Formen entspricht, zwei Gebiete vierter Stufe bei linearer Transformation getrennt in Ruhe bleiben, von denen das eine die Bilder der kubischen Polarform $(rx)(ry)(rz)$, das andere die Bilder der Nullform enthält. Mithin bleibt in dem ersten Gebiet eine Raumkurve dritter Ordnung, in dem zweiten die durch die einzige Invariante J der Nullform bestimmte Fläche zweiter Ordnung für sich in Ruhe. Da überdies die beiden genannten zugehörigen Gruppen gleich zusammengesetzt sind mit der projektiven Gruppe eines binären Gebietes und als Transformationen der zugehörigen Räume einfach transitiv[6]) sind, so sind die Bedingungen der Ähnlichkeit einfach transitiver Gruppen erfüllt.

---

[5]) A. B. Coble, On the relation between the three parameter groups of a cubic space curve and a quadric surface. Amer. M. S. Trans 7, S. 1—20.

[6]) Im Sinne von Lie. Die Gruppe der Raumkurve 3. O. läßt jeden Punkt, der nicht auf der Tangentenfläche der Kurve liegt, durch *sechs* Transformationen in jeden anderen derart übergehen. Die reziproke Gruppe besteht nicht aus Kollineationen.

(Eingegangen am 20. August 1920.)

Über die Nullstellen sukzessiver Derivierten.

Von

Georg Pólya in Zürich.

Einleitung.

Wenn ein Polynom nur reelle Nullstellen besitzt, so besitzen seine sämtlichen Derivierten ebenfalls nur reelle Nullstellen. Wenn eine analytische Funktion Grenzwert von Polynomen mit nur reellen Nullstellen ist, so gehört sie einer scharf abgrenzbaren Klasse von ganzen Funktionen an[1]; auch die ganzen Funktionen dieser Klasse haben die Eigenschaft, daß keine der Derivierten nichtreelle Nullstellen besitzt. Welche Funktionen sind noch dieser Eigenschaft teilhaftig?

Diese Frage in voller Allgemeinheit zu beantworten dürfte nicht leicht sein, aber für zwei Funktionenklassen, die den rationalen ganzen Funktionen besonders nahe stehen, läßt sie sich vollständig entscheiden: für rationale gebrochene Funktionen und für solche ganzen Funktionen von endlichem Geschlecht, die nur eine endliche Anzahl von Nullstellen haben. Die folgenden Sätze gehen über die angedeutete Fragestellung noch etwas hinaus.

I. *Es sei $R(z)$ eine rationale gebrochene Funktion. Die Anzahl der nicht reellen Nullstellen von $R^{(n)}(z)$, der n-ten Derivierten von $R(z)$, wächst mit n ins Unendliche, wenn keiner der folgenden beiden Ausnahmefälle vorliegt:*

1. *$R(z)$ hat im Endlichen nur einen Pol (er kann einfach oder mehrfach sein).*

2. *$R(z)$ hat im Endlichen nur zwei Pole, die in bezug auf die reelle Achse zueinander symmetrisch liegen.*

Im Ausnahmefall 1. *bleibt die Anzahl sämtlicher Nullstellen von $R^{(n)}(z)$ beschränkt, wenn n ins Unendliche strebt. Wenn $R(z)$ sich im*

[1]) G. Pólya und J. Schur, Über zwei Arten von Faktorenfolgen in der Theorie der algebraischen Gleichungen, Crelles Journal **144**, S. 89–113.

Ausnahmefall 2. *befindet und für reelles z reelle Werte annimmt, so bleibt die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von* $R^{(n)}(z)$ *unverändert bei wachsendem n, von einem bestimmten Werte von n an.*

II. *Es seien* $P(z)$ *und* $Q(z)$ *Polynome, es sei* $Q(0) = 0$ *und es sei*

$$G(z) = P(z)\, e^{Q(z)}$$

gesetzt. Die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $G^{(n)}(z)$, *der n-ten Derivierten von* $G(z)$, *wächst mit n ins Unendliche, wenn keiner der folgenden beiden Ausnahmefälle vorliegt:*

1. $Q(z)$ *ist vom Grade* 1.

2. $Q(z)$ *ist vom Grade* 2, $Q(z) = bz - cz^2$, *wo b reell und c positiv ist.*

Im Ausnahmefall 1. *bleibt die Anzahl sämtlicher Nullstellen von* $G^{(n)}(z)$ *beschränkt, wenn n ins Unendliche strebt. Wenn* $G(z)$ *sich im Ausnahmefall* 2. *befindet und für reelles z reelle Werte annimmt, so nimmt die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von* $G^{(n)}(z)$ *mit wachsendem n nie zu.*

Unter welchen Umständen die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $R^{(n)}(z)$ bzw. $G^{(n)}(z)$ mit n ins Unendliche wächst, unter welchen sie beschränkt bleibt, habe ich im Ausnahmefall 2. bei Zulassung von Funktionen, die für reelles z auch nichtreelle Werte annehmen, noch nicht vollständig entschieden. Das Hauptgewicht liegt aber auch nicht auf diesem Ausnahmefall, sondern auf der Methode, die im allgemeinen Fall zur Entscheidung, zu dem Nachweis von unendlich vielen nichtreellen Nullstellen führt. Diese Methode liefert noch viel mehr, nämlich die folgenden Sätze:

III. *Es sei* $F(z)$ *eine meromorphe Funktion. Man betrachte die abzählbare Punktmenge, die aus sämtlichen Nullstellen der Funktionen* $F(z), F'(z), F''(z), \ldots, F^{(n)}(z), \ldots$ *besteht. Die Gesamtheit der Häufungspunkte dieser Punktmenge hängt nur von der Lage der Pole von* $F(z)$ *ab (also z. B. nicht von deren Multiplizität). Zur Gesamtheit der Häufungspunkte gehört ein Punkt z dann und nur dann, wenn die beiden ihm nächstliegenden Pole von* $F(z)$ *in gleichem Abstand von ihm liegen.*

IV. *Es seien* $P(z)$ *und* $Q(z)$ *Polynome, es sei*

$$Q(z) = bz^q + b_1 z^{q-1} + b_2 z^{q-2} + \ldots + b_q,$$

$b \neq 0$, $q \geqq 2$, *und es sei*

$$G(z) = P(z)\, e^{Q(z)}$$

gesetzt. Man betrachte die abzählbare Punktmenge, die aus sämtlichen Nullstellen der Funktionen $G(z), G'(z), G''(z), \ldots, G^{(n)}(z), \ldots$ *besteht. Die Gesamtheit der Häufungspunkte dieser Punktmenge hängt nur von*

dem Grad q und von den beiden höchsten Koeffizienten von $Q(z)$, von b und b_1 ab. Sie besteht nämlich aus q Halbstrahlen, die aus dem Punkte $z = -\frac{b_1}{qb}$ auslaufend die Ebene in q gleiche Winkelräume teilen. Diese Halbstrahlen laufen parallel den q als Vektoren aufgefaßten Wurzeln der Gleichung $bz^q + 1 = 0$.

Die Gesamtheit der Häufungspunkte, die im Satz III erwähnt ist, hat eine auch rein geometrisch genommen merkwürdige Gestalt, die einer näheren Beschreibung wert ist. Es sei a ein Pol der gegebenen meromorphen Funktion $F(z)$. Diejenigen Punkte z der Ebene, die dem Pol a näher liegen, als allen übrigen Polen von $F(z)$, bilden den „Wirkungsbereich" von a. Wenn a und b zwei Pole von $F(z)$ sind, deren Wirkungsbereiche gemeinsame Grenzpunkte haben, so liegen dieselben in der Symmetrale der beiden Punkte a und b, d. h. in der Geraden, die die Verbindungsstrecke von a und b senkrecht trifft und halbiert. Der Wirkungsbereich von a ist daher das Innere von einem konvexen Polygon, das sich eventuell ins Unendliche erstreckt und in diesem Falle auch unendlich viele Seiten haben kann. Handelt es sich z. B. um die elliptische Funktion $\wp(z)$, so sind die Wirkungsbereiche der verschiedenen Pole untereinander kongruent, jedes bildet einen Fundamentalbereich, und hat im allgemeinen die Form eines zentrisch-symmetrischen Sechsecks mit drei Paaren von gleichen und parallelen Seiten, kann aber auch in ein rechtwinkliges Parallelogramm ausarten. Satz III besagt, daß die derivierte Menge der abzählbaren Punktmenge, die aus sämtlichen Nullstellen der meromorphen Funktion $F(z)$ und ihrer Derivierten $F'(z), F''(z), \ldots$ besteht, identisch ist mit der Menge sämtlicher Punkte der Grenzlinien, die die Wirkungsbereiche der verschiedenen Pole von $F(z)$ voneinander scheiden. Das Gebiet, das von dem Pol a beherrscht wird, ist identisch mit der Menge solcher Punkte z, in denen entwickelt die Funktion $F(z)$ eine Potenzreihe ergibt, die an der Konvergenzgrenze den einzigen singulären Punkt a hat. Satz III besagt also, daß solche und nur solche Punkte der Ebene Häufungspunkte der Nullstellen der sukzessiven Derivierten einer meromorphen Funktion sind, in denen entwickelt dieselbe eine Potenzreihe mit mehr als einem singulären Punkt an der Konvergenzgrenze erzeugt. Diese Formulierung bringt uns schon dem Beweis außerordentlich nahe.

Satz III gilt auch im Falle, wenn die meromorphe Funktion nur einen Pol hat. Dessen Wirkungsbereich hat keine Grenzen im Endlichen und die Nullstellen der sukzessiven Derivierten haben keinen Häufungspunkt im Endlichen. Für ganze Funktionen wird aber die Untersuchung sofort viel schwieriger[1a]). Den einfachsten Fall klärt Satz IV auf: die Nullstellen

[1a]) Ich bezeichne, wie üblich, den Wert a als Picardschen Ausnahmewert der ganzen transzendenten Funktion $g(z)$, wenn $g(z) - a$ nur endlich viele Nullstellen hat.

er sukzessiven Derivierten der dort betrachteten ganzen Funktion $G(z)$ äufen sich an genau denselben Stellen, wie die der sukzessiven Derivierten on irgendeiner der rationalen Funktionen, die man erhält, wenn man in

$$\left\{1-\frac{b}{m}\left(z+\frac{b_1}{qb}\right)^q\right\}^{-m}$$

$=1$ oder 2 oder 3 ... setzt.

Übrigens werde ich noch mehr beweisen, als in den Sätzen III, IV usgesprochen ist. Die Gesamtheit der Nullstellen der n-ten Derivierten trebt in beiden untersuchten Fällen mit unendlich wachsendem n gegen ine *Grenzlage*, in einem Sinne, den ich später genau definieren will. Diese renzlage ist identisch mit der Menge der Häufungspunkte sämtlicher Null- tellen sämtlicher Derivierten. Ferner streben auch die Einsstellen oder rgendwelche a-Stellen der n-ten Derivierten gegen dieselbe Grenzlage ie die Nullstellen, und haben auch dieselbe Häufungseigenschaft wie die ullstellen.

Die Untersuchung des infinitären Verhaltens der sukzessiven Derivierten $(z), F'(z), F''(z), \ldots$ in einem *festen* Punkt z bildet die Theorie der aylorschen Reihe. Durch die gegenwärtige Untersuchung wird eine atürliche Erweiterung dieser Theorie angeschnitten: dieselbe Funktionen- olge wird jetzt bei variablem z in einem Gebiet der z-Ebene auf ihre symptotischen Eigenschaften hin untersucht.

Der Satz III (über meromorphe Funktionen) ergibt sich sozusagen hne Rechnung, aus der Kombination geläufigster Resultate, durch eine hnliche Anwendung des Stieltjes-Vitalischen Konvergenzsatzes, wie sie n einer wohlbekannten Arbeit von Jentzsch[2]) zu finden ist. Der Beweis es Satzes IV verläuft nach derselben Methode wie der des Satzes III, enötigt jedoch eine nicht ganz einfache asymptotische Rechnung.

Ein besonders einfaches Beispiel, das den Satz III erläutert, ergibt ie rationale Funktion $\frac{1}{1+z^2}$, deren n-te Dirivierte die n reellen Nullstellen

---

esitzen $g(z)$ und seine beiden ersten Derivierten, $g'(z)$ und $g''(z)$ Picardsche Aus- ahmewerte, so ist $g(z)=P(z)e^{Q(z)}+a$, wo a eine Konstante ist, $P(z)$ und $Q(z)$ olynome sind. Daraus folgt das Korollar: Wenn $g(z)$ nicht die Funktion ae^{bz} ist, o a, b Konstanten, so besitzt das Produkt $g(z)\,g'(z)\,g''(z)$ Nullstellen In einer was weniger vollständigen Form habe ich diese Sätze schon früher angekündigt. Vgl. Bestimmung einer ganzen Funktion endlichen Geschlechts durch viererlei Stellen, yt Tidsskrift for Mat. B. (1921), S. 14–21.) Ich fand sie im Anschluß an eine brief- che Mitteilung von Herrn P. Csillag in Budapest. Der Beweis soll an anderem rt ausgeführt werden. (Anmerkung bei der Korrektur. Juli 1921. G. P.)

[2]) R. Jentzsch, Untersuchungen zur Theorie der Folgen analytischer Funktionen, cta Mathematica **41** (1918), S. 219–251.

$z = \operatorname{cotg} \frac{\pi}{n+1}, \operatorname{cotg} \frac{2\pi}{n+1}, \operatorname{cotg} \frac{3\pi}{n+1}, \ldots \operatorname{cotg} \frac{n\pi}{n+1}$ besitzt. Es wurde durch A. A. Markoff bewiesen[3]), daß die Nullstellen der sukzessiven Derivierten von e^{-z^2}, die bis auf den Faktor e^{-z^2} mit den sogenannten Hermiteschen Polynomen identisch sind, jedem Punkte der reellen Achse beliebig nahe kommen. Dies liefert ein Beispiel zu Satz IV. Auf dieses wichtige Beispiel zugespitzt, würden sich die zur Begründung des Satzes IV nötigen Rechnungen beträchtlich abkürzen lassen. Daß die Derivierten der im Satze II betrachteten ganzen Funktionen nicht sämtlich nur reelle Nullstellen haben können, wenn von den dort präzisierten Ausnahmefällen 1. und 2. abgesehen wird, ist in früheren Arbeiten von mir gezeigt worden[4]). Mit den Nullstellen sukzessiver Derivierten hat sich insbesondere Herr Ålander vielfach beschäftigt[5]). Seine wichtigsten Resultate beziehen sich auf ganze Funktionen vom Geschlechte 2, 3, 4 und 5, jedoch hat er auch manche beachtenswerte Gesichtspunkte, Beispiele, heuristische Betrachtungen und Vermutungen entwickelt, die auch die Gegenstände dieser Arbeit betreffen und die durch die gegenwärtigen Resultate zum Teil bestätigt werden. Insbesondere hat Herr Ålander in seiner Abhandlung a. a. O.[5c]) die Frage aufgeworfen, die durch meinen Satz I beantwortet wird, und die mir übrigens den Anlaß zur Wiederaufnahme meiner Beschäftigung mit dem Gegenstand gegeben hat.

Meromorphe Funktionen.

1. Es sei $F(z)$ eine meromorphe Funktion. Ich betrachte die Folge der positiven Funktionen

$$(1) \qquad \left|\frac{F'(z)}{1!}\right|, \quad \left|\frac{F''(z)}{2!}\right|^{\frac{1}{2}}, \ \ldots \ \left|\frac{F^{(n)}(z)}{n!}\right|^{\frac{1}{n}}, \ \ldots .$$

Ich will zwei Eigenschaften dieser Folge nachweisen.

a) Von der Kreisfläche $|z| \leqq R$ seien alle Punkte entfernt, die von einem Pol von $F(z)$ eine kleinere Entfernung als δ haben. So entsteht

---

[3]) A. A. Markoff, Wahrscheinlichkeitsrechnung (Leipzig u. Berlin 1912), vgl. S. 261, Lehrsatz 2. Für eine Verallgemeinerung in anderer Richtung vgl. G. Pólya, Über den zentralen Grenzwertsatz der Wahrscheinlichkeitsrechnung und das Momentenproblem, Mathem. Zeitschrift 8 (1920), S. 171–181.

[4]) G. Pólya, a) Sur une question concernant les fonctions entières, Comptes Rendus **158** (1914), 330–333, b) Bemerkung zur Theorie der ganzen Funktionen, Jahresbericht d. deutsch. Math. Ver. **24** (1915), 392—400.

[5]) M. Ålander, a) Sur le déplacement des zéros des fonctions entières par leur dérivation, Thèse, Upsal (1914), b) Sur les zéros extraordinaires des dérivées des fonctions entières réelles, Arkiv för Math., Astr. och Fys. **11** (1916), No. 15, c) Sur les zéros des dérivées des fonctions rationnelles et d'autres fonctions méromorphes, Arkiv för Math., Astr. och Fys. **14** (1920) No. 23.

n abgeschlossener Bereich $[R, \delta]$. In irgendeinem Bereiche $[R, \delta]$ ist ie Funktionenfolge (1) gleichmäßig beschränkt.

b) Die Folge (1) ist konvergent in jedem Punkte der Ebene, der zu einer der Grenzlinien gehört, die die Wirkungsbereiche der verschiedenen ole von $F(z)$ voneinander scheiden. Es ist

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{F^{(n)}(z)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} = \frac{1}{|z-a|} \text{ oder } \frac{1}{|z-b|} \text{ oder } \frac{1}{|z-c|} \cdots,$$

enachdem der betrachtete Punkt im Wirkungsbereiche vom Pol a oder dem von b oder in dem von $c \ldots$ liegt. Die Konvergenz findet gleichäßig statt in jedem abgeschlossenen Teilbereiche des Wirkungsbereiches on a, der den Punkt a nicht enthält. Ähnliches gilt für die Wirkungsereiche der übrigen Pole b, c, ... von $F(z)$.

Der Wirkungsbereich von a wurde als die Gesamtheit derjenigen unkte definiert, die näher an a liegen, als an irgendeinem anderen Pol on $F(z)$, „näher" im Sinne von $<$, nicht im Sinne von $\leqq$ verstanden. er Wirkungsbereich von a enthält also nur innere Punkte.

Um a) zu beweisen, betrachte man den Bereich $\left[R + \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right]$; in iesem Bereich ist die Funktion $F(z)$ regulär und $F(z)$ hat darin ein ohlbestimmtes Maximum M. Um jeden Punkt z des Bereiches $[R, \delta]$ äßt sich ein Kreis mit dem Radius $\frac{\delta}{2}$ beschreiben, der vollständig im ereiche $\left[R + \frac{\delta}{2}, \frac{\delta}{2}\right]$ liegt. Nach einer klassischen Ungleichung der unktionentheorie ist also

$$\left| \frac{F^{(n)}(z)}{n!} \right| \leqq \frac{M}{\left(\frac{\delta}{2}\right)^n}, \qquad \left| \frac{F^{(n)}(z)}{n!} \right|^{\frac{1}{n}} \leqq \frac{2\, M^{\frac{1}{n}}}{\delta}$$

n jedem Punkte von $[R, \delta]$, woraus die Behauptung a) folgt.

Um die Behauptung b) zu beweisen, betrachte ich den Pol a, der $+1$-fach sein soll, und setze

$$F(z) = \frac{A_0}{z-a} + \frac{1!\, A_1}{(z-a)^2} + \frac{2!\, A_2}{(z-a)^3} + \ldots + \frac{q!\, A_q}{(z-a)^{q+1}} + \Phi(z),$$

o $\Phi(z)$ an der Stelle a regulär ist ($A_q \neq 0$, $q \geqq 0$). Es ist

$$F^{(n)}(z) = (-1)^n \left\{ \frac{n!\, A_0}{(z-a)^{n+1}} + \frac{(n+1)!\, A_1}{(z-a)^{n+2}} + \ldots + \frac{(n+q)!\, A_q}{(z-a)^{n+q+1}} \right\} + \Phi^{(n)}(z)$$

$$(2) \qquad \frac{F^{(n)}(z)}{n!} =$$

$$= (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+q)A_q}{(z-a)^{n+q+1}} \left\{ 1 + \frac{(z-a)^{q+1}}{(n+1)\dots(n+q)} \frac{(a-z)^n}{n!} \frac{\Phi^{(n)}(z)}{A_q} \right.$$

$$\left. + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{A_k}{A_q} \frac{(z-a)^{q-k}}{(n+k+1)\dots(n+q)} \right\} = (-1)^n \frac{(n+1)(n+2)\dots(n+q)A_q}{(z-a)^{n+q+1}} \{1+\varphi_n(z)\}.$$

Ich bezeichne mit $\varrho(z)$ den Konvergenzradius der Potenzreihe, die durch Entwicklung von $\Phi(z)$ um den Punkt z entsteht. $\varrho(z)$ ist bekanntlich eine stetige Funktion von z. (Denn es sei $|z'-z|<\varrho(z)$, d. h. z' im Konvergenzkreis um z gelegen. Aus der Konstruktion des kleinsten und des größten Kreises vom Mittelpunkte z', der den Konvergenzkreis vom Mittelpunkt z berührt, ergibt sich, wie bekannt

$$\varrho(z) - |z'-z| \leqq \varrho(z') \leqq \varrho(z) + |z'-z|).$$

Ich betrachte die Funktion $\frac{|z-a|}{\varrho(z)}$. Sie ist in jedem Punkte z stetig, wo $\varrho(z)>0$. Sie ist also sicherlich stetig im Wirkungsbereiche von a; daselbst ist ferner $\frac{|z-a|}{\varrho(z)}<1$. Ich bezeichne mit $\mathfrak{A}$ einen abgeschlossenen, ganz im endlichen gelegenen Teilbereich des Wirkungsbereiches von a. Ich bezeichne mit ϱ_0 das Minimum von $\varrho(z)$ in $\mathfrak{A}$ und mit α das Maximum von $\frac{|z-a|}{\varrho(z)}$ daselbst. Es ist also

$$(3) \qquad \varrho(z) \geqq \varrho_0 > 0, \qquad \frac{|z-a|}{\varrho(z)} \leqq \alpha < 1 \qquad \text{in } \mathfrak{A}.$$

Man wähle ein festes β,

$$(4) \qquad \alpha < \beta < 1.$$

Man beschreibe um jeden Punkt z von $\mathfrak{A}$ einen Kreis vom Radius $\beta\varrho(z)$. Das durch die Flächen aller dieser Kreise überdeckte Gebiet heiße $\mathfrak{A}^*$. Ein in $\mathfrak{A}^*$ gelegener Punkt z hat von dem nächstgelegenen singulären Punkte der Funktion $\Phi(z)$ eine Entfernung, die $\geqq(1-\beta)\varrho_0$ ist. Die Funktion $\Phi(z)$ ist somit im Innern und am Rande von $\mathfrak{A}^*$ regulär, und es gibt eine Zahl M, so daß in jedem Punkte z von $\mathfrak{A}^*$

$$|\Phi(z)| \leqq M.$$

Um jeden Punkt z von $\mathfrak{A}$ gibt es aber einen Kreis vom Radius $\beta\varrho(z)$, der ganz in $\mathfrak{A}^*$ verläuft. Daher ist in jedem Punkt z von $\mathfrak{A}$

$$\frac{|\Phi^{(n)}(z)|}{n!} \leqq \frac{M}{(\beta\varrho(z))^n},$$

oraus nach (3) folgt

$$\left|\frac{(z-a)^n \Phi^{(n)}(z)}{n!}\right| \leqq \left(\frac{\alpha}{\beta}\right)^n M. \quad (5)$$

Es folgt aus den Formeln (5) (4) (2) für die durch die letztere erärte Funktion $\varphi_n(z)$, daß

$$\lim_{n=\infty} \varphi_n(z) = 0 \qquad \text{gleichmäßig in } \mathfrak{A}.$$

Dadurch ist Behauptung b) vollständig bewiesen.

In einem ganz im Endlichen gelegenen Bereich, wie z. B. im Bereich $\mathfrak{A}$, ann eine einzelne Funktion $F^{(n)}(z)$ nur eine endliche Anzahl Nullstellen aben. Aus der bewiesenen Behauptung b) folgt also die eine Hälfte des atzes III: außerhalb der Grenzlinien, die die Wirkungsbereiche der verhiedenen Pole von $F(z)$ voneinander scheiden, haben die Nullstellen der olge $F(z)$, $F'(z)$, $F''(z)$, ... keinen Häufungspunkt.

2. Um den Beweis der zweiten, wichtigeren Hälfte des Satzes III öglichst klar zu gestalten, will ich einige Hilfssätze, die keinen Anspruch uf Neuheit erheben und die übrigens teilweise noch schärfer gefaßt erden könnten, explicite formulieren.

Hilfssatz I. Die Funktionen $f_1(z)$, $f_2(z)$, ... $f_n(z)$, ... seien analytisch n Bereiche $\mathfrak{B}$, der nur innere Punkte enthält, und es soll daselbst die unktionenfolge

$$\Re f_1(z),\ \Re f_2(z),\ \ldots\ \Re f_n(z),\ \ldots$$

ie Folge der reellen Teile) konvergieren, und zwar gleichmäßig in jedem bgeschlossenen Teilbereich $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$. Es gebe ferner einen Punkt z_0 n Bereiche $\mathfrak{B}$, so so daß auch die Zahlenfolge

$$f_1(z_0),\ f_2(z),\ \ldots\ f_n(z_0),\ \ldots$$

onvergiert. Dann konvergiert die Funktionenfolge

$$f_1(z),\ f_2(z),\ \ldots\ f_n(z),\ \ldots$$

$\mathfrak{B}$, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereiche $'$ von $\mathfrak{B}$.

Ich nehme an, $\mathfrak{B}$ sei der Einheitskreis $|z| < 1$ und $z_0 = 0$. Von esem Fall kann man durch bekannte Schlußweisen (dachziegelartige berdeckung mit Kreisen) zu einem beliebigen Gebiet übergehn. Als eilgebiet $\mathfrak{B}'$, worin ich den Satz zu beweisen habe, nehme ich die Kreisiche $|z| \leqq r$ an. Es sei $r < R < 1$. Nach Voraussetzung ist, wenn > 0 vorgegeben, für alle hinreichend große m und n

$$|f_m(0) - f_n(0)| < \varepsilon, \qquad |\Re f_m(z) - \Re f_n(z)| < \varepsilon$$

für alle Punkte z im Kreise $|z| \leqq R$. Daraus folgt, wenn die Carathéodorysche Ungleichung[6]) auf die Funktion $f_m(z) - f_n(z)$ angewendet wird,

$$|f_m(z) - f_n(z)| < \frac{2R3\varepsilon}{R-r}$$

im Kreise $|z| \leqq r$, womit Hilfssatz I bewiesen ist.

Hilfssatz II. Es seien $\mu_1, \mu_2, \ldots \mu_n, \ldots$ positive Zahlen, $\lim_{n=\infty} \mu_n = \infty$. Die Funktionen $f_1(z), f_2(z), \ldots f_n(z), \ldots$, seien analytisch im Bereiche $\mathfrak{B}$, der nur innere Punkte enthält, und es soll daselbst die Folge positiver Funktionen

$$(6) \qquad |f_1(z)|^{\frac{1}{\mu_1}}, \ |f_2(z)|^{\frac{1}{\mu_2}}, \ \ldots \ |f_n(z)|^{\frac{1}{\mu_n}}, \ldots$$

gegen eine stets von 0 verschiedene Grenzfunktion konvergieren, und zwar gleichmäßig in jedem abgeschlossenen Teilbereiche $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$. Dann kann man durch Auswahl einer passenden Bestimmung der Funktion $f_n(z)^{\frac{1}{\mu_n}}$ in einem Punkte z_0 von $\mathfrak{B}$ erreichen, daß die Folge der analytischen Funktionen

$$f_1(z)^{\frac{1}{\mu_1}}, \quad f_2(z)^{\frac{1}{\mu_2}}, \ \ldots \ f_n(z)^{\frac{1}{\mu_n}}, \ldots$$

in $\mathfrak{B}$ konvergiert, und zwar gleichmäßig in jedem Teilbereiche $\mathfrak{B}'$ von $\mathfrak{B}$; ferner, daß die Grenzfunktion im Punkte z_0 einen vorgeschriebenen Arcus erhält.

Es sei α eine vorgegebene reelle Zahl. Man wähle von den unendlich vielen Bestimmungen der Funktion $lg\, f_n(z)$ diejenige, für welche

$$-\pi + \mu_n\alpha < \Im\, lg\, f_n(z_0) \leqq \mu_n\alpha + \pi.$$

Das ist mindestens von einem gewissen n an möglich, sobald nämlich $f_n(z_0) \neq 0$ ist. Es folgt daraus

$$(7) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{\Im\, lg\, f_n(z_0)}{\mu_n} = \alpha,$$

und weil die Konvergenz des reellen Teiles von $\frac{lg\, f_n(z_0)}{\mu_n}$ sowieso vorausgesetzt wurde, ergibt sich die Konvergenz der Funktionenfolge

$$(8) \qquad \frac{lg\, f_1(z)}{\mu_1}, \quad \frac{lg\, f_2(z)}{\mu_2}, \ \ldots \ \frac{lg\, f_n(z)}{\mu_n}, \ \ldots$$

in dem Punkte $z = z_0$.

Es sei $\mathfrak{B}'$ ein abgeschlossener Teilbereich von $\mathfrak{B}$. Die Funktionenfolge (6) konvergiert in $\mathfrak{B}'$ gleichmäßig, nach Voraussetzung, und hat somit

[6]) Vgl. z. B. E. Landau, Darstellung und Begründung einiger neuerer Ergebnisse der Funktionentheorie, Berlin (1916), S. 89.

selbst eine stetige Grenzfunktion. Diese verschwindet nicht in $\mathfrak{B}'$, eben-
lls nach Voraussetzung, hat also daselbst ein von 0 verschiedenes
inimum δ. Wegen der Gleichmäßigkeit der Konvergenz gilt in $\mathfrak{B}'$,
öchstens mit Ausnahme von endlich vielen n, $|f_n(z)|^{\frac{1}{\mu_n}} > \frac{\delta}{2}$. Insbesondere
nd die Funktionen $f_n(z)$ alle von einem gewissen n an von 0 verschieden
$\mathfrak{B}'$ und folglich ist daselbst $lg\, f_n(z)$ regulär. Somit kann Hilfssatz 1
ngewendet werden auf die Folge (8), deren reeller Teil in $\mathfrak{B}'$ nach Voraus-
tzung gleichmäßig konvergiert und die im Punkte $z = z_0$, nach (7), über-
aupt konvergiert.

Somit ist die Konvergenz der Folge mit dem allgemeinen Glied

$$e^{\frac{lg\, f_n(z)}{\mu_n}} = (f_n(z))^{\frac{1}{\mu_n}}$$

ewiesen. Die Grenzfunktion hat im Punkte z_0 den vorgegebenen Arcus α,
emäß (7).

Im Hilfssatz II ist implicite die folgende geläufige Tatsache ent-
alten: sind $f(z)$ und $g(z)$ in einem Kreise analytisch, und ist daselbst
$|f(z)| = |g(z)|$, ferner im Mittelpunkte z_0 des Kreises $f(z_0) = g(z_0)$, so
nd $f(z)$ und $g(z)$ identisch.

3. Es sei $\mathfrak{K}$ ein Kreis, dessen Mittelpunkt an der Begrenzung des
irkungsbereiches von a liegt. Ich behaupte, daß es unter den Funktionen
$F(z)$, $F'(z)$ $F''(z)$, ... höchstens endlich viele gibt, die keine Nullstellen
$\mathfrak{K}$ haben.

Ich darf annehmen, daß $\mathfrak{K}$ keinen Pol von $F(z)$ enthält. Würde die
usgesprochene Behauptung nicht zutreffen, so gäbe es unendlich viele
unktionen

$$\left(\frac{F^{(m)}(z)}{m!}\right)^{\frac{1}{m}},\quad m = \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \mu_n, \ldots$$

e im Kreise $\mathfrak{K}$ keinen Verzweigungspunkt hätten, also darin regulär wären.
in Teil von $\mathfrak{K}$ liegt im Wirkungsbereiche von a. Es sei z_0 ein darin
elegener Punkt. Ich kann (nach Hilfssatz II) die Bestimmungen der
unktionen (9) so wählen, daß sie in z_0 konvergieren, und zwar gegen
$\frac{1}{z-a}$ (vgl. b)). Dann muß die Folge (9) (nach b) und nach Hilfssatz II)
einem gewissen Teil des Kreises $\mathfrak{K}$ gegen $\frac{1}{z-a}$ streben, nämlich in dem
eil, der im Wirkungsbereiche von a liegt, Der Kreis $\mathfrak{K}$ liegt aber sicher-
ch im Innern eines passend gewählten Gebietes $[R, \delta]$, von dem in a)
e Rede war. Also ist die Folge (9) in $\mathfrak{K}$ gleichmäßig beschränkt. Daher
üßte, nach dem Stieltjesschen Spezialfall des grundlegenden Vitalischen
onvergenzsatzes, die Konvergenz der Folge (9) sich auf den ganzen Kreis $\mathfrak{K}$

ausdehnen, und die Folge (9) müßte im ganzen Kreis $\mathfrak{K}$ gegen $\frac{1}{z-a}$ streben. Der Kreis $\mathfrak{K}$ enthält aber noch einen Teil von dem Wirkungsbereiche eines von a verschiedenen Poles von $F(z)$, sagen wir von b. In diesem Teil von $\mathfrak{K}$ streben die absoluten Werte der Funktionen (9), wie vorher bewiesen (vgl. b)), gegen $\frac{1}{|z-b|} > \frac{1}{|z-a|}$. Wir kommen somit zu einem Widerspruch. Dieser löst sich nur dann, wenn wir zugeben, daß, eventuell mit Ausnahme von endlich vielen, alle Funktionen (9) im Kreise $\mathfrak{K}$ Verzweigungspunkte, also Nullstellen haben, w. z. b. w.

Ich habe noch etwas mehr bewiesen, als im Satz III ausgesprochen ist. Um das Bewiesene kurz formulieren zu können, will ich erklären, was ich unter der *Grenzlage* einer Folge von Punktmengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots$ verstehe. Diese Punktmengen seien in der Ebene der komplexen Zahlen gelegen. Unter Umgebung eines Punktes z sei ein Kreis mit dem Mittelpunkte z verstanden. Ich teile die Punkte der Ebene in drei Kategorien:

Ein Punkt gehört zur *ersten Kategorie*, wenn in einer gewissen Umgebung von ihm nur endlich viele unter den Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$ Punkte besitzen.

Ein Punkt gehört zur *zweiten Kategorie*, wenn in jeder Umgebung von ihm unendlich viele unter den Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$ Punkte besitzen, aber wenn in einer gewissen Umgebung von ihm unendlich viele unter den Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$ keine Punkte besitzen.

Ein Punkt gehört zur *dritten Kategorie*, wenn in jeder Umgebung von ihm sämtliche Mengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$, eventuell bis auf eine Ausnahme von endlich vielen, Punkte besitzen.

Man kann den Unterschied der drei Kategorien noch etwas anders ausdrücken. Ich bezeichne eine Punktfolge $z_1, z_2, z_3, \ldots z_n, \ldots$ als eine *Repräsentantenfolge* der Mengenfolge $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \mathfrak{M}_3, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$, wenn z_1 der Menge $\mathfrak{M}_1$, z_2 der Menge $\mathfrak{M}_2, \ldots z_n$ der Menge $\mathfrak{M}_n, \ldots$ entnommen ist. Gibt es eine Repräsentantenfolge, die gegen z konvergiert, so gehört z zur *dritten* Kategorie; gibt es keine Repräsentantenfolge, die gegen z konvergiert, aber wohl eine solche, zu deren Häufungspunkten z gehört, so ist z von der *zweiten* Kategorie; gibt es keine Repräsentantenfolge, zu deren Häufungspunkten z gehört, so ist z von der *ersten* Kategorie.

Die Punkte der dritten Kategorie bilden die *kleinste Grenzlage* der Folge von Punktmengen $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots \mathfrak{M}_n, \ldots$ Die Punkte von der dritten und zweiten Kategorie zusammen bilden die *größte Grenzlage* derselben Folge. Wenn die kleinste und die größte Grenzlage zusammenfallen, d. h. wenn Punkte der zweiten Kategorie nicht existieren, so spreche ich kurz von einer *Grenzlage* der fraglichen Folge. Man kann sich den Begriff der Grenzlage etwa an dem Fall klarmachen, wo jedes $\mathfrak{M}_n$ sich auf einen ein-

igen Punkt reduziert, oder an funktionentheoretischen Beispielen. Gute Beispiele bieten dar die Nullstellen einer gleichmäßig konvergenten Folge nalytischer Funktionen innerhalb des Konvergenzbereiches, die bekannte ibbssche Erscheinung bei den Fourierreihen usw.

Es bedeute jetzt $\mathfrak{M}_n$ die abzählbare Punktmenge, die aus sämtlichen Nullstellen von $F^{(n)}(z)$, von der n-ten Derivierten der meromorphen Funktion $F(z)$ besteht. Wie bewiesen wurde, gehört ein Punkt, der im Innern es Wirkungsbereiches irgendeines Poles a von $F(z)$ liegt, zur *ersten Kategorie* (vgl. unter 1); ein Punkt, der gemeinsamer Grenzpunkt der Wirkungsbereiche zweier verschiedener Pole ist, gehört zur dritten Kategorie vgl. vorstehend). Die eingeführte Terminologie erlaubt unser Resultat so u formulieren:

Zusatz I zum Satz III. *Ist $F(z)$ eine meromorphe Funktion, so strebt ie Menge der Nullstellen von $F^{(n)}(z)$ einer bestimmten Grenzlage zu. Zu dieser Grenzlage gehört ein Punkt dann und nur dann, wenn die eiden ihm nächstliegenden Pole von $F(z)$ in gleichem Abstand von ihm iegen.*

Es gilt noch der

Zusatz II zum Satz III. *Ist $F(z)$ eine meromorphe Funktion, so strebt ie Menge der a-Stellen von $F^{(n)}(z)$ einer bestimmten Grenzlage zu. Diese Grenzlage ist identisch mit der Menge der Häufungspunkte der abzählaren Punktmenge, die aus sämtlichen a-Stellen sämtlicher Funktionen (z), $F'(z), \ldots F^{n)}(z), \ldots$ besteht. Endlich ist die fragliche Grenzlage ür alle a-Werte dieselbe. Es gilt somit die auf die 0-Stellen bezügliche Beschreibung der Grenzlage im Satz III auch für die a-Stellen.*

Zusatz II geht daraus hervor, daß die Funktionenfolge

$$|F'(z)-a|, \quad \left|\frac{F''(z)-a}{2!}\right|^{\frac{1}{2}}, \ldots, \left|\frac{F^{(n)}(z)-a}{n!}\right|^{\frac{1}{n}}, \ldots$$

ieselben beiden Eigenschaften hat, wie die Folge (1): in jedem Bereich $R, \delta]$ bleibt sie gleichmäßig beschränkt, und im Innern des Wirkungsereiches irgendeines Poles von $F(z)$ ist

$$\lim_{n=\infty} \left|\frac{F^{(n)}(z)-a}{n!}\right|^{\frac{1}{n}} = \lim_{n=\infty} \left|\frac{F^{(n)}(z)}{n!}\right|^{\frac{1}{n}}.$$

Ganze Funktionen von endlichem Geschlecht mit endlich vielen Nullstellen.

4. Es seien $P(z)$ und $Q(z)$ Polynome vom Grade p bzw. q

0) $$P(z) = z^p + a_1 z^{p-1} + \ldots + a_p$$

$$(11) \qquad Q(z) = \frac{z^q}{q} + b_2 z^{q-2} + b_3 z^{q-3} + \ldots + b_{q-1} z$$

$p \geqq 0$, $q \geqq 2$. Um Satz IV zu beweisen, genügt es, ganze Funktionen

$$(12) \qquad G(z) = P(z) e^{Q(z)}$$

zu betrachten, wo $P(z)$, $Q(z)$ die Form (10), (11) haben. Denn wenn auch eine im Satz IV erwähnte ganze Funktion $G(z)$ nicht die vorgelegte spezielle Form hätte, so lassen sich immer drei Kontsanten a, b, c bestimmen, so daß $aG(bz+c)$ sicherlich die vorgelegte Form hat. Ich werde zwei Eigenschaften der durch (10) (11) (12) gegebenen ganzen Funktion $G(z)$ nachweisen.

A. Zu jedem R $(R > 0)$ und zu jedem a läßt sich eine Konstante M bestimmen, derart daß im Kreise $|z| \leqq R$

$$\left| \frac{(G^{(n)}(z) - a)\, n^{\frac{n-p}{q} + \frac{1}{2}}\, e^{-\frac{n}{q}}}{n!} \right|^{n^{\frac{1}{q}-1}} < M.$$

B. Man teile die Ebene durch q Halbstrahlen, die von dem Punkte $z = 0$ aus durch die q Wurzeln der Gleichung $z^q = -1$ gezogen ins Unendliche laufen, in q Winkelräume. Es sei a fest gegeben, $e^{\frac{2\pi i}{q}} = \omega$ gesetzt. Dann besteht

$$\lim_{n=\infty} \left| \frac{(G^{(n)}(z) - a)\, n^{\frac{n-p}{q} + \frac{1}{2}}\, e^{-\frac{n}{q}}}{n!} \right|^{n^{\frac{1}{q}-1}} = \left| e^{z\omega^{-r}} \right|$$

in demjenigen unter den beschriebenen Winkelräumen, dessen Winkelhalbierende durch den Punkt ω^r geht.

Da die Funktionen e^z, $e^{z\omega^{-1}}, \ldots e^{z\omega^{-q+1}}$ sich nicht bloß in einer multiplikativen Konstante unterscheiden, folgt aus A., B. nach der Beweismethode, die ich unter 1, 2, 3 dargelegt habe, daß die Menge der Häufungsstellen sämtlicher a Stellen von $G(z)$, $G'(z)$, $G''(z) \ldots G^{(n)}(z), \ldots$ identisch ist mit den q Halbstrahlen, die die Gebiete voneinander scheiden, worin der Grenzwert verschiedenen analytischen Charakter hat; ferner daß diese q Halbstrahlen auch die Grenzlage der a-Stellen von $G^{(n)}(z)$ bilden. Für $a = 0$ ergibt sich insbesondere der Satz IV.

Die Eigenschaft A. ist sehr leicht nachzuweisen. Es kann zunächst eine positive Konstante A bestimmt werden, so daß für

$$(13) \qquad |z| \leqq R, \qquad |u| \geqq 1$$

$$(14) \qquad |P(z+u)| \leqq e^{A|u|^{q-1}}.$$

erner gibt es eine Konstante B, so daß für $|z| \leqq R$

$$\sum_{k=0}^{q-1} \frac{1}{k!} |Q^{(k)}(z)| \leqq B.$$

aher ist, wenn beide Bedingungen (13) erfüllt sind,

5) $$|Q(z+u)| = \left| \frac{u^q}{q} + \sum_{k=0}^{q-1} \frac{u^k}{k!} Q^{(k)}(z) \right| \leqq \frac{|u^q|}{q} + B|u|^{q-1}$$

d, $A + B = C$ gesetzt, unter denselben Bedingungen (13) gemäß 4) (15)

$$|G(z+u)| \leqq \exp\left(\frac{|u|^q}{q} + C|u|^{q-1} \right).$$

ch schreibe $e^z = \exp(z)$.) Daher ist

$$\left| \frac{G^{(n)}(z)}{n!} \right| \leqq \frac{\exp\left(\frac{|u|^q}{q} + C|u|^{q-1} \right)}{|u|^n}.$$

tzen wir hierin $|u|^q = n$. Es ergibt sich

6) $$\left| \frac{G^{(n)}(z)}{n!} \right| \leqq e^{\frac{n}{q}} n^{-\frac{n}{q}} e^{Cn^{1-\frac{1}{q}}}.$$

achten wir noch, daß

7) $$\lim_{n=\infty} \left| \frac{n^{\frac{n-p}{q}+\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{q}}}{n!} \right|^{n^{\frac{1}{q}-1}} = \lim_{n=\infty} \exp\left\{ n^{\frac{1}{q}} \left(1 - \frac{1}{q}\right)(1 - \lg n) \right\} = 0.$$

us (16) (17) ergibt sich leicht die Behauptung A.

Die Behauptung B. konnte ich hingegen nur durch eine asymptotische chnung nachweisen, die ziemlich weitläufig ist und eigentlich mehr beist, als es genau genommen nötig wäre. Ich schicke zwei Bemerkungen raus. Erstens: es genügt mit Rücksicht auf (17) die Behauptung B. r im Falle $a = 0$ zu beweisen. Zweitens: es genügt nur einen Winkelum unter den q fraglichen zu betrachten, etwa den Winkelraum

$$-\frac{\pi}{q} < \arg z < +\frac{\pi}{q}.$$

den übrigen $q - 1$ Winkelräumen kann man dann durch Drehungen r Ebene übergehn.

5. Erstreckt man die Integration um eine den Punkt $w = 0$ umsende doppelpunktslose geschlossene Kurve, so ist

$$\frac{G^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i} \int \frac{G(z+w)}{w^n} \frac{dw}{w}.$$

Der Beweis der Behauptung A. unter 4 legt die Variablenvertauschung $w | n^{\frac{1}{q}} w$ nahe; es ist

$$\frac{G^{(n)}(z)}{n!} = \frac{1}{2\pi i n^{\frac{n}{q}}} \int \frac{G(z + n^{\frac{1}{q}} w)}{w^n} \frac{dw}{w}. \tag{18}$$

Setzen wir $\frac{1}{k!} Q^{(k)}(z) = Q_k(z)$, $k = 0, 1, \ldots, q$. Dann ist (vgl. (11))

$$Q(z + n^{\frac{1}{q}} w) = \frac{w^q n}{q} + w^{q-1} n^{1-\frac{1}{q}} z + \sum_{k=0}^{q-2} w^k n^{\frac{k}{q}} Q_k(z).$$

$$\frac{G^{(n)}(z)}{n!} = \tag{19}$$

$$= \frac{n^{\frac{p}{q}} e^{z n^{1-\frac{1}{q}}}}{2\pi i n^{\frac{n}{q}} e^{-\frac{n}{q}}} \int \frac{P(z + n^{\frac{p}{q}} w)}{n^{\frac{p}{q}}} \left(\frac{e^{\frac{w^q - 1}{q}}}{w} \right)^n e^{(w^{q-1} - 1) n^{1-\frac{1}{q}} z} \exp\left\{ \sum_{k=0}^{q-2} w^k n^{\frac{k}{q}} Q_k(z) \right\} \frac{dw}{w}$$

Man bezeichne mit $\mathfrak{G}$ dasjenige Gebiet der w-Ebene, worin

$$\left| \frac{e^{\frac{w^q - 1}{q}}}{w} \right| < 1. \tag{20}$$

$\mathfrak{G}$ enthält nur innere Punkte. Die q-ten Einheitswurzeln gehören *nicht* zu $\mathfrak{G}$. Man beachte, daß solche Punkte w, worin beide Ungleichungen

$$\frac{1}{|w|} < 1, \tag{21}$$

$$\left| e^{\frac{w^q - 1}{q}} \right| < 1 \tag{22}$$

zugleich erfüllt sind, sicherlich zu $\mathfrak{G}$ gehören. (21) ist im Außenraum des Einheitskreises erfüllt. Um (22) zu diskutieren, setze ich

$$w = s e^{i\psi} \qquad (s > 0, \ \psi \text{ reell}) \tag{23}$$

und betrachte die in Polarkoordinaten s, ψ gegebene Kurve

$$s^q = \frac{1}{\cos q\psi}. \tag{24}$$

Die Kurve (24) hat q verschiedene Äste; man teile die w-Ebene in $2q$ gleiche Winkelräume, deren gemeinsame Spitze der Punkt $w = 0$ ist, so daß einer davon durch die positive reelle Achse halbiert wird; in jeden zweiten Winkelraum liegt eine q-te Einheitswurzel (in der Winkel halbierenden) und verläuft ein Ast der Kurve (24), der in der betreffenden Einheitswurzel den Kreis $|w| = 1$ berührt (vgl. Figur für $q = 3$). Die Kurve (24) zerschneidet die w-Ebene in $q + 1$ Stücke: in einem derselben, das den Punkt $w = 0$ enthält und nach dem üblichen Sprachgebrauch als ein „Sterngebiet" zu bezeichnen ist, ist $\Re(w^q - 1) = s^q \cos q\psi - 1 < 0$

so (22) erfüllt. In den q übrigen, untereinander kongruenten Gebieten $\Re(w^q - 1) > 0$; an der Kurve (24) selber ist $\Re(w^q - 1) = s^q \cos q\psi - 1 = 0$.

Betrachten wir das regelmäßige q-Eck, das den Kreis $|w| = 1$ in den q-ten Einheitswurzeln berührt. Sieht man von diesen q Berührungspunkten ab, so sind entlang des geschlossenen Linienzuges $\mathfrak{L}$ alle Bedingungen (21) (22) erfüllt. Für (21) ist das klar. Betrachten wir diejenige Seite von $\mathfrak{L}$, die durch den Punkt $w = 1$ geht. Sie hat in Polarkoordinaten die Gleichung $s \cos\psi = 1$. Daß (22) entlang $\mathfrak{L}$ erfüllt ist, kommt somit auf das Bestehen der Ungleichung

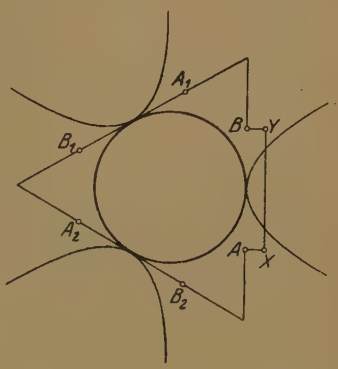


Fig. 1.

$$\frac{\cos q\psi}{(\cos\psi)^q} - 1 < 0 \qquad \text{für } 0 < \psi < \frac{\pi}{2q}$$

heraus, die man etwa aus der in denselben Grenzen geltenden Ungleichung

$$\frac{d}{d\psi}(\lg\cos q\psi - q\lg\cos\psi) = -q(\operatorname{tg} q\psi - \operatorname{tg}\psi) < 0$$

erweist. — Daß die polygonale Linie $\mathfrak{L}$, abgesehen von seinen q zum Anfangspunkt nächsten Punkten, ganz im Gebiet $\mathfrak{G}$ verläuft, ist wichtig für das Folgende.

In den q-ten Einheitswurzeln $1, \omega, \omega^2, \ldots, \omega^{q-1}$ $(\omega = e^{\frac{2\pi i}{q}})$ ist $\varrho\{(w^{q-1} - 1)n^{1-\frac{1}{q}}z\}$ das ausschlaggebende Glied unter dem Integralzeichen rechts in (19). Es sei

$$z = re^{i\varphi} \tag{5}$$

$$r > 0, \quad -\frac{\pi}{q} < \varphi < +\frac{\pi}{q}. \tag{6}$$

ist für

$$w = \omega^\nu, \quad 1 \leqq |\nu| \leqq \frac{q}{2}$$

$$\Re(w^{q-1} - 1)z = r\left\{\cos\left(-\frac{2\pi\nu}{q} + \varphi\right) - \cos\varphi\right\}. \tag{7}$$

ist gemäß (26)

$$\left|-\frac{2\pi\nu}{q} + \varphi\right| \geqq \frac{2\pi|\nu|}{q} - |\varphi| > \frac{2\pi|\nu|}{q} - \frac{\pi}{q} \geqq \frac{\pi}{q} > |\varphi|,$$

$$\left|-\frac{2\pi\nu}{q} + \varphi\right| \leqq \frac{2\pi|\nu|}{q} + |\varphi| < \pi + \frac{\pi}{q} \leqq 2\pi - \frac{\pi}{q} < 2\pi - |\varphi|,$$

woraus, nach (27)

$$r^{-1}\Re(w^{q-1}-1)z=\cos\left(-\frac{2\pi\nu}{q}+\varphi\right)-\cos\varphi<0 \tag{28}$$

$$\text{für } w=\omega^\nu, \quad \nu\not\equiv 0 \pmod q$$

folgt.

Diese Verhältnisse veranlassen uns, den geschlossenen Linienzug

$$AXYBA_1B_1A_2B_2\dots A_{q-1}B_{q-1}A$$

der Figur (worin $q=3$) als Integrationskurve für das Integral (19) zu wählen. Ich will diesen Linienzug mit $\mathfrak{Q}'$ bezeichnen. $\mathfrak{Q}'$ entsteht aus dem regelmäßigen q-Eck $\mathfrak{Q}$ durch eine rechteckige Ausbuchtung $AXYB$ der durch $w=1$ gehenden Seite. Setzt man

$$A=1-\beta i, \quad B=1+\beta i, \quad X=1+\xi-\beta i, \quad Y=1+\xi+\beta i,$$

so ist der Integrationsweg durch die Angabe der beiden reellen Zahlen ξ, β $(\beta>0)$ vollständig festgelegt. Die genaue Wahl von ξ und β behalte ich mir vor, nur folgendes sei im voraus bemerkt: β wird fest gewählt. Die Wahl von ξ wird von n abhängen. Doch wird eine Zahl α fest gewählt, derart, daß die beiden horizontalen Strecken mit den Endpunkten

$$1-\alpha+i\beta, \quad 1+\alpha+i\beta; \quad 1-\alpha-i\beta, \quad 1+\alpha-i\beta \tag{29}$$

ganz im Gebiete $\mathfrak{G}$ liegen, wo (20) erfüllt ist, und es wird stets mindestens von einem gewissen n an $-\alpha<\xi<+\alpha$ sein[7]).

Unter diesen Bedingungen ist entlang $YBA_1B_1\dots A_{q-1}B_{q-1}AX$ für ein gewisses $\gamma, \gamma>0$

$$\int_{YB\dots AX}\frac{P\left(z+n^{\frac{1}{q}}w\right)}{n^{\frac{p}{q}}}\left(\frac{e^{\frac{w^q-1}{q}}}{w}\right)^n e^{(w^{q-1}-1)n^{1-\frac{1}{q}}z}\exp\left\{\sum_{k=0}^{q-2}w^k n^{\frac{k}{q}}Q_k(z)\right\}\frac{dw}{w}=O\left(e^{-\gamma n^{\frac{1}{q}}}\right) \tag{30}$$

und zwar gleichmäßig in z, wenn $z=re^{i\varphi}$ auf einen abgeschlossenen endlichen Teil des Winkelraumes (26) beschränkt ist. Man kann nämlich gemäß (28), eine Zahl $c>0$ und an der durch ω^ν gehenden Seite von $\mathfrak{Q}$ zwei Punkte A_ν, B_ν fixieren $(\nu=1,2,\dots q-1)$, die ω^ν unter sich enthalten, derart, daß an der Strecke $A_\nu B_\nu$ für alle in Betracht kommende z

$$\Re(w^{q-1}-1)z<-c.$$

Die Linienzüge $YBA_1, B_1A_2, \dots, B_{q-2}A_{q-1}, B_{q-1}AX$ liegen im Innern des Gebietes $\mathfrak{G}$, wo (20) erfüllt ist, also ist an diesen Zügen das Integral sogar $O(e^{-kn})$ für ein passend gewähltes k.

[7]) Für $q=2$ sind die Verhältnisse etwas anders, aber viel einfacher. Man kann als Integrationskurve für (19) etwa das Quadrat wählen, das den Kreis $|w|=1$ in den Punkten $w=1, i, -1, -i$ berührt.

Ich setze jetzt $w = 1 + \eta$ und entwickle nach Potenzen von η

1) $$\left(\frac{w^q - 1}{q} - \lg w\right) n + (w^{q-1} - 1)\, n^{\frac{q-1}{q}} z + \sum_{k=0}^{q-2} w^k n^{\frac{k}{q}} Q_k(z) = \sum_0^\infty A_k \eta^k$$

$A_0, A_1, A_2, \ldots$ sind Polynome in $n^{\frac{1}{q}}$ und z. Es ist insbesondere

2) $$\begin{cases} A_0 = \sum_{k=0}^{q-2} n^{\frac{k}{q}} Q_k(z), \\ A_1 = (q-1)\, n^{\frac{q-1}{q}} z + \sum_{k=0}^{q-2} k n^{\frac{k}{q}} Q_k(z), \\ A_2 = \frac{q}{2} n + \frac{(q-1)(q-2)}{2} n^{\frac{q-1}{q}} z + \sum_{k=0}^{q-2} \frac{k(k-1)}{2} Q_k(z) n^{\frac{k}{q}}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

ist zu ersehen, daß $A_3, A_4, \ldots$ als höchste Potenz von n $n^1 = n^{\frac{q}{q}}$ enthalten. Ich bemerke ferner, daß $A_q, A_{q+1}, A_{q+2}, \ldots$ von z unabhängig und, indem

$$= \frac{n}{q}(1 + (-1)^q), \quad A_{q+1} = (-1)^{q+1} \frac{n}{q+1}, \quad A_{q+2} = (-1)^{q+2} \frac{n}{q+2}, \ldots.$$

h werde die Ungleichung nötig haben: für $|\eta| < \frac{1}{2}$ ist

3) $$|A_{q+1}\eta^{q+1} + A_{q+2}\eta^{q+2} + \ldots| < \eta^{q+1} n.$$

h setze jetzt

4) $$\eta = \delta + \frac{it}{\sqrt{n}},$$

5) $$\delta = B_1 n^{-\frac{1}{q}} + B_2 n^{-\frac{2}{q}} + \ldots + B_q n^{-1},$$

6) $$A_0 + A_1\eta + A_2\eta^2 + \ldots + A_q\eta^q$$
$$= C_0 + \frac{it}{\sqrt{n}} C_1 - t^2 C_2 + \frac{t^3}{\sqrt{n}} C_3 + \frac{t^4}{n} C_4 + \ldots + \frac{t^q}{n^{\frac{q-2}{2}}} C_q,$$

$B_1, B_2, B_3, \ldots, B_q$ nur von z, $C_0, C_1, C_2, \ldots, C_q$ von n und z abhängen, und $B_1, B_2, B_3, \ldots, B_q$ so bestimmt sind, daß C_1 möglichst stark für $n = \infty$ verschwindet. (Diese Forderung werde ich bald präzisieren.) Man findet

7) $$\begin{cases} C_0 = A_0 + A_1\delta + A_2\delta^2 + \ldots + A_q\delta^q, \\ C_1 = A_1 + 2A_2\delta + 3A_3\delta^2 + \ldots + qA_q\delta^{q-1}, \\ C_2 = \frac{1}{n}(A_3 + 3A_3\delta + \ldots), \\ C_3 = -\frac{i}{n}(A_3 + \ldots), \\ \ldots\ldots\ldots \end{cases}$$

Insbesondere ist

$$(38)\quad \frac{C_n}{n} = (q-1)n^{-\frac{1}{q}} + \sum_{k=0}^{q-2} k n^{-\frac{q-k}{q}} Q_k(z) + (q+\ldots)(B_1 n^{-\frac{1}{q}} + B_2 n^{-\frac{2}{q}} + \ldots) +$$

$$= (qB_1 + q - 1)n^{-\frac{1}{q}} + (qB_2 + \ldots)n^{-\frac{2}{q}} + (qB_3 + \ldots)n^{-\frac{3}{q}} + \ldots$$

Verlangt man, daß in dieser Entwicklung nach wachsenden Potenzen von $n^{-\frac{1}{q}}$ die Koeffizienten von $n^{-\frac{1}{q}}, n^{-\frac{2}{q}}, \ldots, n^{-\frac{q}{q}}$ verschwinden sollen, so lassen sich $B_1, B_2, \ldots, B_q$ nacheinander bestimmen, und zwar als Konstanten oder als Polynome in z. Es ist $B_1 = -\frac{q-1}{q}$ usw. [8]). Nach dieser Bestimmung von $B_1, B_2, \ldots, B_q$, also von δ gemäß (35), sind auch die Ausdrücke $C_0, C_1, \ldots, C_q$ mitbestimmt, nach (37). Ich will folgende Eigenschaften hervorheben:

C_0 enthält $n^{\frac{q-2}{q}}$ als höchste Potenz von n.

$C_1, C_2, C_3, \ldots, C_q$ können nach wachsenden Potenzen von $n^{-\frac{1}{q}}$ geordnet werden (sie enthalten keine positive Potenz von n). Für $\lim n = \infty$ konvergieren sie also gegen endliche Grenzwerte und bleiben bei allen fraglichen Werten von z, n beschränkt. Insbesondere ist

$$(39)\quad \lim_{n=\infty} C_2 = \frac{q}{2}.$$

Setzt man gemäß (34)

$$(40)\quad w = 1 + \eta = 1 + \delta + \frac{it}{\sqrt{n}},$$

so sei die geradlinige Strecke XY dadurch bestimmt, daß t in (40) reelle Werte annehmen soll. Führt man die Variablenvertauschung (40) aus, so wird aus (19) mit Berücksichtigung von (30), (31), (36)

$$(41)\quad \frac{G^{(n)}(z)}{n!} = \frac{n^{\frac{p}{q}} e^{zn^{1-\frac{1}{q}} + C_0}}{2\pi n^{\frac{n}{q}+\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{q}}} \left\{ \int_{-(\beta+d)\sqrt{n}}^{+(\beta-d)\sqrt{n}} \Phi_n(t)\,dt + O\left(\sqrt{n}\, e^{-\gamma n^{1-\frac{1}{q}} - C_0}\right) \right\},$$

wo zur Abkürzung

$$(42)\quad d = \Im\delta,$$

$$(43)\quad \Phi_n(t) = \frac{P(z+n^{\frac{1}{q}}w)}{n^{\frac{p}{q}}} \frac{1}{1+\delta+\frac{it}{\sqrt{n}}} \exp\left\{ \frac{it}{\sqrt{n}} C_1 - t^2 C_2 + \frac{t^3}{\sqrt{n}} C_3 + \ldots + \frac{t^q}{n^{\frac{q-2}{q}}} C_q + \sum_{q+} \right.$$

[8]) Die Gleichung $C_1 = 0$ definiert δ als eine algebraische Funktion von $n^{-\frac{1}{q}}$. Der Ausdruck (35) ist der Anfang der Reihenentwicklung des einzigen Zweiges, der für $n^{-\frac{1}{q}} = 0$ verschwindet.

esetzt wurde. Es ist aus den auseinandergesetzten Eigenschaften der rößen $C_1, C_2, \ldots, C_q, A_{q+1}, \ldots$ (vgl. insbesondere (33), (39)) und aus der edeutung von η, δ (vgl. (34), (35)) klar, daß bei festem t

44) $$\lim_{n=\infty} \Phi_n(t) = e^{-\frac{qt^2}{2}}.$$

un gibt es offenbar zwei Konstanten K, K', so daß für alle fragliche erte von z, n

45) $$|C_1| < K,$$

46) $$\left| \frac{P(z+n^{\frac{1}{q}}w)}{n^{\frac{p}{q}}} \frac{1}{1+\delta+\frac{it}{\sqrt{n}}} \right| < K'.$$

erner ist für genügend großes n sicher

47) $$\left| C_2 - \frac{q}{2} \right| < \frac{1}{4}$$

gl. (39)); ferner, wie auch das feste β gewählt ist,

48) $$-2\beta < -\beta - d < \beta - d < +2\beta,$$

a doch nach (42), (35)

$$\lim_{n=\infty} d = 0.$$

un beachte man, daß nach (34) entweder $|\eta| \leqq 2|\delta|$ oder $|\eta| \leqq \frac{2|t|}{\sqrt{n}}$. m ersteren Falle ist, gemäß (33),

$$\left| \sum_{k=q+1}^{\infty} A_k \eta^k \right| \leqq 2^{q+1} |\delta|^{q+1} n < 1$$

on einem gewissen n an, mit Rücksicht auf (35). Im zweiten Falle ist nnerhalb der Grenzen des Integrals (41)

$$\left| \sum_{k=q+1}^{\infty} A_k \eta^k \right| \leqq \left| \frac{2t}{\sqrt{n}} \right|^{q+1} n = t^2 2^{q+1} \left| \frac{t}{\sqrt{n}} \right|^{q-1} < t^2 2^{2q} \beta^{q-1}$$

on einem gewissen n an, mit Rücksicht auf (48), vorausgesetzt, daß, um er Ungleichung (33) die Anwendbarkeit zu sichern, das feste $\beta < \frac{1}{8}$ gehlt ist. Zusammengefaßt ist auf alle Fälle

49) $$\left| \sum_{k=q+1}^{\infty} A_k \eta^k \right| \leqq 1 + t^2 2^{2q} \beta^{q-1}.$$

Nun bin ich endlich in der Lage, die Größe von β zu fixieren: es ei $< \frac{1}{8}$ gewählt, ferner so, daß für alle fraglichen n und z

50) $$2\beta|C_3| + (2\beta)^2|C_4| + \ldots + (2\beta)^{q-2}|C_q| + 2^{2q}\beta^{q-1} < \frac{1}{4}$$

wird, was zu erreichen ist, da $C_3, C_4, \ldots, C_q$ beschränkt bleiben. Nach (43), (45), (46), (47), (49), (50) ist

$$(51) \qquad |\Phi_n(t)| < K' \exp\left\{K + \left(-\frac{q}{2} + \frac{1}{4}\right)t^2 + t^2\frac{1}{4} + 1\right\}$$

von einem gewissen n an für $-2\beta < t < +2\beta$, also, gemäß (48), im ganzen Integrationsintervall des Integrals in (41). Da

$$\int_{-\infty}^{+\infty} K' \exp\left(K + 1 - \frac{q-1}{2}t^2\right) \cdot dt$$

konvergiert, folgt aus (44), (51) offenbar, daß

$$\lim_{n=\infty} \int_{-(\beta+d)\sqrt{n}}^{+(\beta-d)\sqrt{n}} \Phi_n(t)\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{qt^2}{2}}\,dt = \sqrt{\frac{2\pi}{q}}.$$

Daher ist, nach (41),

$$(52) \qquad \lim_{n=\infty} \frac{G_n(z)}{n!} \frac{n^{\frac{n}{q}+\frac{1}{2}} e^{-\frac{n}{q}}}{n^{\frac{p}{q}} e^{zn^{1-\frac{1}{q}}+C_0}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi q}}.$$

Man beachte, daß gemäß (37), (35), (32) C_0 aus einer endlichen Anzahl von Gliedern besteht, daß es in z ein Polynom ist, und daß $n^{\frac{q-p}{q}}$ die höchste Potenz von n ist, die in C_0 vorkommt. Man kann also dem Resultat (52) auch die Form geben

$$(53) \quad G^{(n)}(z) \sim n!\, n^{-\frac{n-p}{q}-\frac{1}{2}} e^{\frac{n}{q}} \exp\left\{z n^{1-\frac{1}{q}} + D_2(z) n^{1-\frac{2}{q}} + \ldots + D_q(z)\right\},$$

wo $D_2(z), D_3(z), D_4(z), \ldots, D_q(z)$ Polynome in z bedeuten, zu deren Berechnung der Beweis eine bestimmte Anweisung gibt. Aus dieser asymptotischen Entwicklung folgt reichlich die unter 4 ausgesprochene Behauptung B.

Diskussion der Ausnahmefälle.

6. Es sei $R(z)$ eine rationale Funktion. Soll die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $R^{(n)}(z)$ unter einer von n unabhängigen oberen Schranke liegen, so darf offenbar die Grenzlage dieser Nullstellen keine Strecke außerhalb der reellen Achse in sich begreifen (vgl. Zusatz I zu Satz III). Man betrachte das kleinste konvexe Polygon $\mathfrak{P}$, das sämtliche Pole von $R(z)$ umschließt, man zerlege den Umfang dieses Polygons $\mathfrak{P}$ durch die darauf liegenden Pole von $R(z)$ in einzelne Strecken, und man errichte auf jeder solchen Strecke als Mittellot einen Halbstrahl in der Richtung der äußeren Normalen von $\mathfrak{P}$. Von jedem solchen Halbstrahl

hört ein unendliches Stück zur Grenzlage der Nullstellen von $R^{(n)}(z)$. ll also die Grenzlage keine Strecke außerhalb der reellen Achse enthalten, bleiben nur zwei Fälle übrig: entweder reduziert sich das erwähnte lygon $\mathfrak{P}$ auf einen einzigen Punkt (Ausnahmefall 1 des Satzes I) oder f eine Strecke, die von der reellen Achse senkrecht halbiert wird und ren beide Endpunkte die einzigen Pole von $R(z)$ sind (Ausnahmefall 2 s Satzes I).

Es sei $G(z)$ eine ganze Funktion von der im Satz II erwähnten Form. sei q der Grad des Polynoms $Q(z)$, $Q(z) = bz^q + b_1 z^{q-1} + \ldots$. Soll e im Satz IV beschriebene Grenzlage keine Strecke außerhalb der reellen hse in sich begreifen, so muß die Gleichung $bz^q + 1 = 0$ nur reelle urzeln haben; also muß b reell und negativ und $q = 2$ sein; ferner issen die $q = 2$ im Satz IV erwähnten Halbstrahlen zusammen die reelle hse ausmachen, also muß b_1 reell sein (Ausnahmefall 2 des Satzes II). ler aber die Funktion $G(z)$ darf überhaupt nicht unter den Satz IV len, also $q = 1$ sein (Ausnahmefall 1 des Satzes II).

7. Nachdem ich so ausführlich dargelegt habe, welche ganz spezielle ometrische Konfigurationen zu den Ausnahmefällen Anlaß geben, will ich e Resultate der algebraischen Diskussion dieser Fälle in aller Kürze mit- len und die Beweise, die aus geläufigen Überlegungen aufgebaut sind, r andeuten.

Es handelt sich um die ganze Funktion $G(z)$ und um die rationale nktion $R(z)$. Im Ausnahmefall 1 haben diese die Form

$$G(z) = P(z)\, e^{az}, \qquad R(z) = \frac{Q(z)}{(z-a)^p} + S(z)$$

d im Ausnahmefall 2 die Form

$$G(z) = P(z)\, e^{bz-cz^2}, \qquad R(z) = \frac{Q(z)}{((z-b)^2 + c^2)^p} + S(z),$$

(z), $Q(z)$, $S(z)$ sind Polynome, a eine Konstante, b, c reelle Konstanten, > 0, p eine positive ganze Zahl. Ich betrachte die n-ten Derivierten Ausnahmefall 1

$$G^{(n)}(z) = P_n(z)\, e^{az}, \qquad R^{(n)}(z) = \frac{Q_n(z)}{(z-a)^{p+n}}$$

d im Ausnahmefall 2

$$G^{(n)}(z) = P_n(z)\, e^{bz-cz^2}, \qquad R^{(n)}(z) = \frac{Q_n(z)}{((z-b)^2 + c^2)^{p+n}}.$$

h nehme n, wenn es sich um $R(z)$ handelt, größer als der Grad von $z)$ an.) In diesen Formeln sind $P_n(z)$, $Q_n(z)$ Polynome. Man sieht s durch vollständige Induktion ein, sich auf eine Rekursionsformel tzend, worin $P_{n+1}(z)$ linear homogen durch $P_n(z)$ und $P_n'(z)$ aus-

gedrückt wird, ähnlich wie $Q_{n+1}(z)$ durch $Q_n(z)$ und $Q_n'(z)$. Dieselbe Rekursionsformel zeigt, daß im Ausnahmefall 1 $P_{n+1}(z)$ denselben Grad hat wie $P_n(z)$, während im Ausnahmefall 2 der Grad von $P_{n+1}(z)$ denjenigen von $P_n(z)$ um eine Einheit übertrifft. Ähnlich ist das Verhältnis zwischen $Q_{n+1}(z)$ und $Q_n(z)$.

Ich betrachte jetzt den Fall, wo $G(z)$ und $R(z)$ für reelles z reelle Werte annehmen. In diesem Falle *hat* $P_{n+1}(z)$ *ebenso viel oder weniger nichtreelle Nullstellen als* $P_n(z)$, und ähnlich steht es mit $Q_{n+1}(z)$ und $Q_n(z)$. Dies kann man aus der Beziehung zwischen den Graden und aus der Abzählung der neu hinzukommenden reellen Nullstellen schließen. Man benutzt entweder die erwähnten Rekursionsformeln oder noch besser, das Theorem von Rolle. Es ist dabei nützlich, auch die Nullstellen in $z = +\infty$ bzw. in $z = -\infty$ zu berücksichtigen. Man sagt, daß eine solche Nullstelle im Unendlichen vorliegt, wenn die Funktion für $z = +\infty$ bzw. $z = -\infty$ mit einem von einer gewissen Stelle an unveränderten Vorzeichen der Null zustrebt. Bei Zulassung solcher Nullstellen bleibt der Satz von Rolle gültig, der die Existenz einer ungeraden Anzahl Nullstellen der Derivierten zwischen zwei sukzessiven Nullstellen der Funktion behauptet.

So sind die Umrisse der einfachen Überlegungen, die bestätigen können, was in den Sätzen I, II über die Ausnahmefälle gesagt wurde[9]). Diese Sätze I, II erhalten eine besonders scharfe Fassung, wenn man sich auf solche Funktionen $G(z)$ und $R(z)$ beschränkt, die für reelles z reelle Werte annehmen, und wenn man noch voraussetzt, daß $R(z)$ echtgebrochen ist, d. h. für $z = \infty$ verschwindet. Befindet sich $G(z)$ oder $R(z)$ nicht in einem der beiden Ausnahmefälle, so wächst die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $G^{(n)}(z)$ bzw. $R^{(n)}(z)$ mit n ins Unendliche. Befindet sich hingegen $G(z)$ bzw. $R(z)$ in einem der beiden Ausnahmefälle, so nimmt die Anzahl der nichtreellen Nullstellen von $G^{(n)}(z)$ bzw. $R^{(n)}(z)$ mit wachsendem n nie zu, strebt also gegen einen endlichen Grenzwert und ist insbesondere stets $= 0$, wenn schon $G(z)$ bzw. $R(z)$ keine nichtreellen Nullstellen hatten. Man kann in den Ausnahmefällen übrigens (mit dem Rolleschen Satze) auch zeigen, daß die reellen Nullstellen von $G^{(n)}(z)$ bzw. $R^{(n)}(z)$ von einem gewissen n an sämtlich einfach sind. Diese Verhältnisse sind besonders bemerkenswert im Ausnahmefall 2, wo doch die reellen Nullstellen von $G^{(n)}(z)$ bzw. von $R^{(n)}(z)$ mit wachsendem n immer zahlreicher werden und in jedes Intervall der reellen Achse eindringen.

8. Ich will nicht unerwähnt lassen, daß sich das Verhalten der absolut größten Nullstellen von $R^{(n)}(z)$ mit Erfolg studieren läßt, wenn $R(z)$ eine

[9]) Für andere Beweise vgl. z. B. a. a. O. [4b]), S. 392–393, [5c]), S. 9–11 oder etwa schon H. Laurent, Traité d'algèbre III[e] partie (Paris 1894) die Aufgaben 14, 16, 30, 39, S. 70–75.

tionale Funktion ist. $R(z)$ soll die Pole $a, b, c, \ldots, l$ bzw. von der rdnung $\alpha, \beta, \gamma, \ldots, \lambda$ besitzen. Dann hat $R(z)$ die Form

$$\begin{aligned} R(z) = S(z) &+ \frac{A_0}{z-a} + \frac{1!\,A_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(\alpha-1)!\,A_{\alpha-1}}{(z-a)^\alpha} \\ &+ \frac{B_0}{z-b} + \frac{1!\,B_1}{(z-b)^2} + \ldots + \frac{(\beta-1)!\,B_{\beta-1}}{(z-b)^\beta} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ &+ \frac{L_0}{z-l} + \frac{1!\,L_1}{(z-l)^2} + \ldots + \frac{(\lambda-1)!\,L_{\lambda-1}}{(z-l)^\lambda} \\ = S(z) &+ \sum\left(\frac{A_0}{z-a} + \frac{1!\,A_1}{(z-a)^2} + \ldots + \frac{(\alpha-1)!\,A_{\alpha-1}}{(z-a)^\alpha}\right). \end{aligned}$$

$S(z)$ bedeutet ein Polynom, $A_0, A_1, \ldots, A_{\alpha-1}, B_0, \ldots, L_{\lambda-1}$ Konstanten, d zwar ist $A_{\alpha-1} \neq 0$, $B_{\beta-1} \neq 0, \ldots, L_{\lambda-1} \neq 0$; Σ bedeutet eine Sumation über alle Pole $a, b, c, \ldots, l$. Es ist

$$R^{(n)}(z) = (-1)^n \sum\left(\frac{n!\,A_0}{(z-a)^{n+1}} + \frac{(n+1)!\,A_1}{(z-a)^{n+2}} + \ldots + \frac{(n+\alpha-1)!\,A_{\alpha-1}}{(z-a)^{n+\alpha}}\right).$$

$$\lim_{n=\infty} \frac{(nz)^{n+1}(-1)^n R^{(n)}(nz)}{n!} =$$

$$\sum\left(\frac{A_0}{\left(1-\frac{a}{nz}\right)^{n+1}} + \frac{n+1}{nz-a}\,\frac{A_1}{\left(1-\frac{a}{nz}\right)^{n+1}} + \ldots + \frac{(n+1)\ldots(n+\alpha-1)}{(nz-a)\ldots(nz-a)}\,\frac{A_{\alpha-1}}{\left(1-\frac{a}{nz}\right)^{n+1}}\right)$$

$$A_0 + \frac{1}{z}A_1 + \ldots + \frac{1}{z^{\alpha-1}}A_{\alpha-1}\Big)\,e^{\frac{a}{z}}$$

$$\Big)\,e^{\frac{a}{z}} + \mathfrak{B}\left(\frac{1}{z}\right)e^{\frac{b}{z}} + \ldots + \mathfrak{L}\left(\frac{1}{z}\right)e^{\frac{l}{z}}$$

$$\Big),$$

$\mathfrak{A}(z), \mathfrak{B}(z), \mathfrak{C}(z), \ldots, \mathfrak{L}(z)$ Polynome bedeuten, bzw. vom Grade $\alpha-1, \beta-1, \gamma-1, \ldots, \lambda-1$ und $F(z)$ eine ganze Funktion ist.

Über das asymptotische Verhalten der Nullstellen von $R^{(n)}(z)$ in einer it n sich verengernden Umgebung des Punktes $z=\infty$ gibt das Verlten der Nullstellen von $F\left(\frac{1}{z}\right)$ Aufschluß. Die Nullstellenverteilung eser Funktion für kleines z gehorcht aber sehr eleganten, geometrisch rmulierbaren Gesetzen[10]), die mit dem schon unter 6 betrachteten klein-

[10]) G. Pólya, Geometrisches über die Verteilung der Nullstellen gewisser ganzer nszendenter Funktionen, Sitzungsber. München (1920), S. 285—290. Vgl. noch Poincaré, Théorie analytique de la propagation de la chaleur (Paris, 1895), pitel 11. E. Feyer, Asymptotische Darstellung gewisser meromorpher Funktionen, ssertation, Breslau 1919. Diese Stellen waren mir bei Abfassung meiner zitierten beit noch unbekannt.

sten konvexen Polygon $\mathfrak{P}$ zusammenhängen, das sämtliche Punkte $a, b, c, \ldots, l$ umschließt. Insbesondere gilt folgendes: Errichtet man von dem Nullpunkt aus Halbstrahlen, die den äußeren Normalen des Polygons $\mathfrak{P}$ parallel sind, so schließen sich die Nullstellen von $F\left(\frac{1}{z}\right)$ diesen Halbstrahlen asymptotisch an. Dieses Verhalten ist bei Kenntnis des Satzes III aus geometrischen Gründen plausibel.

Ich überlasse es dem Leser, sich zu überlegen, bis zu welchem Punkte der Beweis des Satzes I gefördert werden kann, wenn man von der Kenntnis des Satzes III absieht und sich nur auf die Grenzformel (54) und auf die Kenntnis der Nullstellenverteilung der darin auftretenden ganzen Funktion $F(z)$ stützt[11]).

---

[11]) Vgl. dazu a. a. O. [5c]) S. 4—8. Für die eingehende Behandlung eines hierhergehörigen Spezialfalles vgl. noch G. Pólya, Bemerkung über die Mittag-Lefflerschen Funktionen $E_\alpha(z)$. Töhoku Math. J. **19** (1921), S. 241—248.

(Eingegangen am 7. Januar 1921.)

Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Polynomen eines Orthogonalsystems.

Von

G. Szegö in Berlin.

Einleitung.

In meiner Arbeit, Über die Entwicklung einer analytischen Funktion ach den Polynomen eines Orthogonalsystems[1]), habe ich Entwicklungen ntersucht, die nach den Näherungsnennern

$$Q_0(x), Q_1(x), \ldots Q_n(x), \ldots$$

es zur Funktion

$$\int_{-1}^{1} \frac{p(t)}{x-t}\,dt$$

hörigen Stieltjesschen Kettenbruches fortschreiten; hierbei bezeichnet (x) eine im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ definierte (L)[2]) integrable nicht-gative Funktion, die daselbst nicht fast überall[3]) verschwindet; diese ettenbruchnenner $Q_n(x)$ sind gewisse klassische Polynome, die man un-hängig von jeder Kettenbruchtheorie auch durch die folgenden Ortho-nalitätseigenschaften definieren kann:

a) $Q_n(x)$ ist ein Polynom n-ten Grades,

b) der Koeffizient von x^n in $Q_n(x)$ ist positiv,

c) $$\int_{-1}^{1} p(x) Q_m(x) Q_n(x)\,dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \gtrless n, \\ 1 & \text{für } m = n \end{cases} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots).$$

n folgenden bezeichne ich diese Polynome $Q_n(x)$ als *orthogonal* in bezug f die „Belegungsfunktion" $p(x)$, oder auch als orthogonale Polynome,

[1]) Mathematische Annalen 82 (1921), S. 188–212.

[2]) D. h. im Lebesgueschen Sinne.

[3]) „Fast überall" heißt: mit Ausnahme einer Menge mit dem Lebesgueschen ße 0.

die zu der Belegungsfunktion $p(x)$ gehören. Aus der Definition folgt, daß die Funktionen

$$\sqrt{p(x)}\,Q_0(x),\ \sqrt{p(x)}\,Q_1(x),\ \ldots,\ \sqrt{p(x)}\,Q_n(x),\ \ldots$$

ein Orthogonalsystem bilden[4]).

Ich führe folgende bekannte Beispiele an:

Für $p(x)=1$ ist $Q_n(x)$ (abgesehen von einem konstanten Faktor) das n-te Legendresche Polynom.

Für $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ist $Q_n(x)=$ konst. $\cos n \arccos x$, d. h. $Q_n(\cos\vartheta)$ $=$ konst. $\cos n\vartheta$.

Für $p(x)=\sqrt{1-x^2}$ ist $Q_n(\cos\vartheta)=$ konst. $\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}$.

Für $p(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ $(\alpha, \beta > -1)$ sind die $Q_n(x)$ die Jacobischen (hypergeometrischen) Polynome[5]).

In meiner oben angeführten Arbeit habe ich die Entwicklung einer *analytischen Funktion* nach den Polynomen $Q_n(x)$ untersucht, mit dem Ergebnis, daß für eine ausgedehnte Klasse von Entwicklungen analoge Sätze gelten, wie für die Entwicklung nach Legendreschen Polynomen. Diese Klasse war dadurch charakterisiert, daß die Belegungsfunktion $p(x)$ als im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ positiv und samt

$$(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}\log p(x)$$

(L) integrabel vorausgesetzt war. Die Ergebnisse dieser Arbeit waren eigentlich Anwendungen meiner früheren Untersuchungen über Toeplitzsche Formen[6]).

Ich will nun in der vorliegenden Arbeit mit völlig anderen Methoden eine weit schwierigere Frage behandeln, über welche in der Literatur bisher nur ganz spezielle Resultate vorliegen, nämlich, die Entwicklung einer *„willkürlichen" Funktion* nach den Polynomen $Q_n(x)$, d. h. einer Funktion, von welcher zunächst gar nichts anderes vorausgesetzt wird, als daß sie (etwa im Lebesgueschen Sinne) integrabel sei[7]).

[4]) In der Stieltjesschen Theorie werden „Belegungen" der ganzen reellen Achse (also eines unendlichen Intervalls) betrachtet. Sobald man sich auf ein endliches Intervall beschränkt, ist es offenbar keine Einschränkung der Allgemeinheit, wenn das Intervall $(-1, 1)$ zugrunde gelegt wird. — Bezüglich der wichtigsten Eigenschaften der Polynome $Q_n(x)$ verweise ich übrigens auf meine Arbeit a. a. O.[1]).

[5]) Vgl. Kapitel III.

[6]) Diese Zeitschrift **6** (1920), S. 167–202 und **9** (1921), S. 167–190.

[7]) Vgl. G. Darboux, Sur l'approximation des fonctions de très grands nombres et sur une classe étendue de développements en série. Journal de Mathématiques pures et appliquées (3) **4** (1878), S. 5–56; O. Blumenthal, Über die Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach den Nennern des Kettenbruches usw.

Unter einer solchen Entwicklung verstehe ich, ausführlicher formuliert, gendes: $p(x)\ f(x)$ sei (L) integrabel, ferner setze man

$$c_n = \int_{-1}^{1} p(x) f(x) Q_n(x)\, dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

bei die $Q_n(x)$ die oben definierten, zu $p(x)$ gehörigen orthogonalen lynome bezeichnen. Dann gehört zu $f(x)$ die Entwicklung

$$f(x) \sim c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) + \ldots + c_n Q_n(x) + \ldots;$$

r bedeutet das Zeichen $\sim$, wie auch in der Theorie der Fourierschen ihen, lediglich das Bestehen der Gl. (1), sagt aber nichts über die nvergenz, Summierbarkeit usw. von (2) aus. Die oben angeführten ispiele zeigen, daß die Entwicklung nach trigonometrischen Funktionen wie nach Legendreschen Polynomen in diese allgemeinere Klasse von twickelungen gehört.

In dieser Arbeit soll ein Theorem bewiesen werden, welches für einen eren Punkt ξ des Intervalls $-1 \leqq x \leqq 1$, in dem die Belegungsfunktion $x)$ gewisse Stetigkeitseigenschaften besitzt, sämtliche auf die Entwick- ng (2) betreffenden Konvergenz- und Summierbarkeitsfragen auf die tsprechenden Fragen bezüglich Fourierscher (Kosinus-) Reihen zurück- irt. Dieser Satz spielt somit in der Theorie dieser allgemeineren Ent- cklungen eine ähnliche Rolle, wie ein bekannter Satz von A. Haar[8]) der Theorie der Legendreschen Reihen, der seinerseits übrigens als ezialfall in dem hier bewiesenen Theorem enthalten ist. Auch habe ich i der Abfassung dieser Arbeit gewisse Untersuchungen von J. Tamarkine r Augen gehabt, durch die eine allgemeine Klasse von Entwicklungen it denen jedoch die unsrigen — abgesehen von einigen trivialen Fällen —

---

ttinger Dissertation 1898. Einleitung; W. Stekloff, Sur le développement d'une ction donnée en séries usw. Journal für die reine und angewandte Mathematik (1903), S. 207–236; vgl. auch A. Kneser, Die Theorie der Integralgleichungen d die Darstellung willkürlicher Funktionen in der mathematischen Physik. Mathe- tische Annalen **63** (1907), S. 477–524, bes. S. 524. — Die in der vorliegenden Arbeit wendete Methode scheint übrigens auch zur Behandlung der anderen, oben er- hnten Fragestellung (betreffend die Entwicklung einer *analytischen* Funktion) ge- net zu sein.

[8]) A. Haar, Reihenentwicklungen nach Legendreschen Polynomen. Mathe- tische Annalen **78** (1917), S. 121–136. — Während der Korrektur sind mir die genden Arbeiten von W. H. Young zugänglich geworden: Sur les séries de poly- nes de Legendre. Comptes Rendus **165** (1917), S. 696–699; On the connexion ween Legendre series and Fourier series. Proceedings of the London Mathe- tical Society (2) **18** (1919), S. 141–162. Diese Arbeiten enthalten ein Theorem r Legendresche Reihen, welches etwas allgemeiner ist als das Haarsche.

nichts Gemeinsames haben) auf ähnliche Weise auf die trigonometrische Entwicklung zurückgeführt wird, wie es hier geschieht[9]).

Ich definiere zunächst eine Klasse (A) von Belegungsfunktionen $p(x)$ folgendermaßen. Es sei $p(x)$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ nach Riemann integrabel und im Innern dieses Intervalles positiv. An den Endpunkten $x = \pm 1$ kann sie auch 0 oder unendlich werden, jedoch so, daß sie von der Form

$$p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} q(x)$$

sei, wobei $-\frac{1}{2} \leqq \alpha, \beta \leqq \frac{1}{2}$ und $q(x)$ eine beschränkte, im Riemannschen Sinne integrable Funktion ist, welche im ganzen Intervall $(-1, 1)$ oberhalb einer positiven Schranke bleibt. Mit Hilfe dieser Bezeichnungsweise kann ich das Hauptresultat dieser Arbeit in der folgenden Form aussprechen:

Theorem. *Es sei $p(x)$ eine Funktion der Klasse (A);*

$$Q_0(x), Q_1(x), \ldots, Q_n(x), \ldots$$

seien die zugehörigen orthogonalen Polynome, für die

$$\int_{-1}^{1} p(x) Q_m(x) Q_n(x)\, dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \gtrless n \\ 1 & \text{für } m = n \end{cases} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots),$$

ist. Es sei $f(x)$ eine reelle Funktion, für welche $p(x)[f(x)]^2$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ (L) integrabel ist[10]*), und $s_n(x)$ bezeichne die n-te Partialsumme der Entwicklung von $f(x)$ nach den Polynomen $Q_n(x)$, d. h. der Entwicklung*

$$f(x) \sim c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) + \ldots + c_n Q_n(x) + \ldots$$

$$\left[c_n = \int_{-1}^{1} p(x) f(x) Q_n(x)\, dx\right];$$

es sei ferner $\sigma_n(x) = \sigma_n(\cos\vartheta)$ die n-te Partialsumme der Entwicklung von $p(\cos\vartheta) f(\cos\vartheta) |\sin\vartheta|$ in eine Kosinusreihe, d. h. der Entwicklung

$$p(\cos\vartheta) f(\cos\vartheta) |\sin\vartheta| \sim \frac{\gamma_0}{2} + \gamma_1 \cos\vartheta + \ldots + \gamma_n \cos n\vartheta + \ldots$$

$$\left[\gamma_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} p(\cos\vartheta) f(\cos\vartheta) \sin\vartheta \cos n\vartheta\, d\vartheta\right].$$

Dann besteht zwischen $s_n(x)$ und $\sigma_n(x)$ an jeder inneren Stelle $\xi = \cos\vartheta_0$

[9]) J. Tamarkine, Sur quelques points de la théorie des équations différentielles linéaires ordinaires et sur la généralisation de la série de Fourier. Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo **34** (1912), S. 345–382. Ebenda findet sich eine Zusammenstellung der Literatur bezüglich dieser Frage.

[10]) Daraus folgt schon die Integrierbarkeit von $p(x) f(x)$.

s *Intervalles* $-1 \leqq x \leqq 1$, *wo die Belegungsfunktion* $p(x)$ *zweimal* tig *differenzierbar ist, die folgende Beziehung*

h.
$$\lim_{n=\infty}\left[s_n(\xi) - \frac{\sigma_n(\xi)}{p(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}\right] = 0,$$

$$\lim_{=\infty}\left[\sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu(\xi)\int_{-1}^{1} p(x) f(x) Q_\nu(x)\, dx\right.$$

$$\left. - \frac{1}{p(\xi)\sqrt{1-\xi^2}} \sum_{\nu=0}^{n}{}' \cos\nu\vartheta_0 \cdot \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} p(\cos\vartheta) f(\cos\vartheta) \sin\vartheta \cos\nu\vartheta\, d\vartheta\right] = 0\ ^{11}).$$

Dieses Theorem liefert unmittelbar die Möglichkeit, die bekannten nvergenz- und Summierbarkeitssätze der Theorie der Fourierschen ihen auf unsere allgemeineren Reihentypen zu übertragen. Für $p(x) = 1$ gt hieraus der oben erwähnte Satz von Haar [12]).

Im I. Kapitel schicke ich zunächst einige elementare Hilfssätze vor-s, um die späteren Beweisführungen nicht unterbrechen zu müssen. enda wird auch die Beweismethode skizziert. Im II. Kapitel betrachte zwei an sich interessante Belegungstypen, nämlich die folgenden:

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{P_1(x)} \quad \text{und} \quad \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{P_2(x)},$$

bei $P_1(x)$ und $P_2(x)$ im Intervalle $(-1, 1)$ positive Polynome be-chnen. Für diese Belegungen lassen sich die Polynome $Q_n(x)$ (wenigstens n einem gewissen Index an) explizite aufschreiben und auch die Ent-cklung nach ihnen läßt sich einfach auf die trigonometrische Entwick-ng zurückführen. Durch diese Betrachtungen gelangt man äußerst ein-h zum Beweis unseres Theorems. Im III. Kapitel untersuche ich dlich Entwicklungen nach Jacobischen (hypergeometrischen) Polynomen;

---

[11]) Ich benütze im folgenden die Bezeichnungsweise $\sum_{\nu=0}^{n}{}' a_\nu = \sum_{\nu=0}^{n} a_\nu - \frac{a_0}{2}$. — Die eimalige stetige Differenzierbarkeit ist so zu verstehen, daß ein ξ enthaltendes nes Intervall existiert, wo diese Bedingung erfüllt ist. Diese Bedingung läßt sich igens noch beträchtlich reduzieren.

[12]) Man könnte offenbar die Partialsummen unserer Entwicklung ebensogut auch denen der Kosinusreihe von $p(\cos\vartheta) f(\cos\vartheta)$ (oder auch von $f(\cos\vartheta)$ selbst), es a. a. O. [8]) Haar macht, vergleichen; dann muß aber die weitere Voraussetzung roffen werden, daß $p(\cos\vartheta) f(\cos\vartheta)$ im Intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq \pi$, oder was dasselbe ßt, $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} p(x) f(x)$ im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ (L) integrabel sei. (Dies folgt neswegs aus den Voraussetzungen unseres Theorems. Beispiel: $p(x) = 1$, $f(x)$ sei ür $-1 \leqq x \leqq \frac{1}{2}$ und $\frac{1}{\sqrt{1-x}}\,\frac{1}{\log(1-x)}$ für $\frac{1}{2} \leqq x \leqq 1$).

das dabei erhaltene Resultat gestattet auch diese Entwicklungen auf die trigonometrischen zurückzuführen[13]).

Die in dieser Arbeit verwendete Methode (vgl. § 3), die übrigens ganz elementar ist, scheint auch zur Behandlung anderer verwandten Fragen mit Erfolg brauchbar zu sein. Von diesen erwähne ich hier nur die Untersuchung der angegebenen Entwicklung an solchen Stellen des Intervalls $-1 \leqq x \leqq 1$, in denen die der Belegungsfunktion $p(x)$ in unserem Theorem auferlegte Bedingung (zweimal stetig differenzierbar zu sein) nicht erfüllt ist; ferner die Behandlung von Entwicklungen, die nach solchen Stieltjesschen Kettenbruchnennern fortschreiten, welche zu einer Belegung des unendlichen Intervalls $-\infty < x < \infty$ (oder $0 \leqq x < \infty$) gehören. (Vgl. die Fußnote [4])). Die eingehende Untersuchung dieser sowie anderer Entwicklungen, die nach gewissen von mir definierten Polynomtypen fortschreiten[14]), behalte ich mir für eine andere Gelegenheit vor.

Inhalt.

Kapitel I. Hilfssätze. Darstellung der Methode.

§ 1. Ein Hilfssatz aus der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.

§ 2. Ein Hilfssatz aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

§ 3. Darstellung der Methode.

Kapitel II. Über zwei Typen von Belegungsfunktionen.

§ 4. Über die orthogonalen Polynome, die zu der Belegungsfunktion $\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}$ gehören.

---

[13]) Es ist vielleicht nicht ohne Interesse, daß der Beweis dieser Theoreme (vgl. § 3) nicht auf die asymptotische Untersuchung der Polynome $Q_n(x)$ (oder auf die der „Lebesgueschen Konstanten") begründet ist, wie es bei verwandten Betrachtungen gewöhnlich der Fall zu sein pflegt. (Vgl. etwa A. Haar, a. a. O. [8])). — Meine Methode liefert übrigens auch eine asymptotische Formel der Polynome $Q_n(x)$. Diese Formel, die ich in einer anderen Arbeit ableiten will, lautet:

$$Q_n(\cos\vartheta_0) = \sqrt{\frac{2}{\pi \sin\vartheta_0}}\, \Re \frac{1}{\Delta(e^{i\vartheta_0})}\, e^{-i\left[(n+\frac{1}{2})\vartheta_0 - \frac{\pi}{4}\right]} + \varepsilon_n,$$

wobei $\Delta(z) = \Delta(p; z)$ die im Hilfssatz II (§ 2) definierte analytische Funktion bezeichnet und $\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0$ ist. (Die Voraussetzungen für $p(x)$ sind hierbei dieselben, wie in dem oben ausgesprochenen Theorem.)

[14]) Beiträge zur Theorie der Toeplitzschen Formen. (Fortsetzung.) Diese Zeitschrift 9 (1921), S. 167–190; vgl. insbesondere S. 180. — Über orthogonale Polynome, die zu einer gegebenen Kurve der komplexen Ebene gehören. Ebenda S. 218 bis 270; vgl. insbesondere S. 263.

§ 5. Über die Quadratsumme der orthogonalen Polynome.
§ 6. Beweis von Satz I.
§ 7. Beweis von Satz II.

apitel III. Entwicklung einer willkürlichen Funktion nach Jacobischen (hypergeometrischen) Polynomen.
§ 8. Hilfssätze.
§ 9. Beweis.

Kapitel I.

Hilfssätze. Darstellung der Methode.

§ 1.

Ein Hilfssatz aus der Theorie der Funktionen einer reellen Veränderlichen.

Hilfssatz I. *Zu jeder Funktion $p(x)$ der Klasse (A)*[15]*, die an ıer inneren Stelle ξ des Intervalles $(-1, 1)$ zweimal stetig differenzierbar und zu jeder noch so kleinen positiven Zahl ε lassen sich zwei unktionen von der Form*

$$p_1(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{P_1(x)} \quad \text{und} \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P_2(x)}$$

geben, wobei $P_1(x)$ und $P_2(x)$ für $-1 \leqq x \leqq 1$ positive Polynome zeichnen, die folgenden Bedingungen genügen:

a) *Es ist für $-1 \leqq x \leqq 1$*

$$p_1(x) \leqq p(x) \leqq p_2(x).$$

b) *Man hat*

$$0 \leqq \int_{-1}^{1} \frac{\log p_2(x) - \log p_1(x)}{(x-\xi)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \varepsilon.$$

c) *Endlich ist*

$$p_1(\xi) = p_2(\xi) = p(\xi).$$

Anmerkung. *Aus* b) *folgt mit Rücksicht auf* a)

$$0 \leqq \int_{-1}^{1} \frac{\log p_2(x) - \log p(x)}{(x-\xi)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \varepsilon$$

d eine analoge Ungleichung für $p_1(x)$. (Umgekehrt ergibt sich aus sen zwei Ungleichungen durch Addition eine im wesentlichen mit b) ichwertige Beziehung.)

[15]) Vgl. Einleitung.

Man setze

$$k(x) = \log \frac{\sqrt{1-x^2}}{p(x)} = \log \frac{(1-x)^{\frac{1}{2}-\alpha}(1+x)^{\frac{1}{2}-\beta}}{q(x)};$$

dies ist eine von oben beschränkte (höchstens logarithmisch unendlich werdende) (R)[16]) integrable Funktion. Die im Hilfssatz I enthaltene Forderung (soweit sie sich auf $p_1(x)$ bezieht) läßt sich somit auch folgendermaßen aussprechen:

Es sei $k(x)$ eine von oben beschränkte (höchstens logarithmisch unendlich werdende) (R) integrable Funktion, die für $x = \xi$ $(-1 < \xi < 1)$ zweimal stetig differenzierbar ist. Man bestimme ein für $-1 \leqq x \leqq 1$ positives Polynom $P_1(x)$ derart, daß

a) $$k(x) \leqq \log P_1(x) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

b) $$\int_{-1}^{1} \frac{\log P_1(x) - k(x)}{(x-\xi)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \varepsilon,$$

c) $$k(\xi) = \log P_1(\xi)$$

seien.

Wäre $k(x)$ eine ganze Funktion, etwa ein Polynom, so würde der Nachweis der Existenz von $P_1(x)$ gar keine Schwierigkeit bereiten[17]). Es genügt also vollkommen, die Existenz eines Polynoms $\Pi(x)$ zu beweisen, für das

a′) $$k(x) \leqq \Pi(x) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

b′) $$\int_{-1}^{1} \frac{\Pi(x) - k(x)}{(x-\xi)^2} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \varepsilon,$$

c′) $$k(\xi) = \Pi(\xi)$$

gelten.

Zu diesem Zwecke betrachte man die Funktion

$$l(x) = \frac{k(x) - k(\xi) - k'(\xi)(x-\xi) - \frac{1}{2}k''(\xi)(x-\xi)^2}{(x-\xi)^2},$$

die im Intervalle $(-1, 1)$ von oben beschränkt (höchstens logarithmisch

[16]) D. h. im Riemannschen Sinne.

[17]) Man betrachte dann einfach die Abschnitte $s_m(x)$ (m ist ungerade) der nach den Potenzen von $(x-\xi)$ fortschreitenden Taylorschen Entwicklung der analytischen Funktion $e^{k(x)}$. Da für genügend große m gleichmäßig im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$

$$|e^{k(x)} - s_m(x)| < \varepsilon'(x-\xi)^{m+1} \qquad (\lim_{\varepsilon=0} \varepsilon' = 0)$$

ausfällt, so genügt $P_1(x) = s_m(x) + \varepsilon'(x-\xi)^{m+1}$ der Forderung.

endlich) und (R) integrabel ist. Es gibt mithin ein Polynom $\pi(x)$, r das

$$l(x) \leqq \pi(x) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

d

$$\int_{-1}^{1} [\pi(x) - l(x)] \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \varepsilon$$

. (Dies folgt aus der Definition des Riemannschen Integrals.) Man tze endlich

$$\Pi(x) = k(\xi) + k'(\xi)(x-\xi) + \tfrac{1}{2} k''(\xi)(x-\xi)^2 + (x-\xi)^2 \pi(x),$$

nn erfüllt $\Pi(x)$ offenbar die Bedingungen a'), b'), c'). Es ist auch icht ersichtlich, daß sich stets solche Approximationspolynome $P_1(x)$ mitteln lassen, die für $-1 \leqq x \leqq 1$ unter einer von ε unabhängigen eren Schranke bleiben.

Ähnlich beweist man die Existenz von $P_2(x)$.

§ 2.

Ein Hilfssatz aus der Theorie der Funktionen einer komplexen Veränderlichen.

Man verdankt Herrn Fejér den folgenden Satz aus der Theorie der gonometrischen Polynome:

Jedes positive trigonometrische Polynom $t(\vartheta)$ läßt sich in der Form

$$t(\vartheta) = |a(z)|^2 \qquad (z = e^{i\vartheta})$$

rstellen, wobei $a(z)$ ein Polynom von z ist[18]).

Das Polynom $a(z)$ ist im allgemeinen durch $t(\vartheta)$ noch *nicht* ein- utig bestimmt; es müssen vielmehr etwa noch folgende einschränkende dingungen hinzukommen:

1. $a(z)$ sei von 0 verschieden für $|z| \leqq 1$,
2. $a(0)$ sei reell und positiv.

ermit ist das Polynom $a(z)$, das die obige Darstellung liefert, *eindeutig* stimmt. Man hat nämlich

$$\log t(\vartheta) = 2\,\Re \log a(e^{i\vartheta}),$$

bei $\Re \log a(z)$ den reellen Teil der für $|z| \leqq 1$ regulären analytischen

[18]) Über trigonometrische Polynome. Journal für die reine und angewandte thematik **146** (1916), S. 53–82.

Funktion $\log a(z)$ ($\log a(0)$ ist reell) bezeichnet und hieraus ergibt sich bekanntlich

$$\log a(z) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log t(\bar{\vartheta})\,\frac{1+ze^{-i\bar{\vartheta}}}{1-ze^{-i\bar{\vartheta}}}\,d\bar{\vartheta}\ ^{19}).$$

Diese Betrachtungen lassen sich in gewissem Sinne verallgemeinern[20]). Es sei $f(\vartheta)$ eine für $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ definierte, samt $\log f(\vartheta)$ (L) integrable (fast überall positive) Funktion. Dann läßt sich die analytische Funktion

$$D(z) = e^{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log f(\bar{\vartheta})\,\frac{1+ze^{-i\bar{\vartheta}}}{1-ze^{-i\bar{\vartheta}}}\,d\bar{\vartheta}}$$

bilden, die folgende Eigenschaften besitzt [vgl. die Fußnote [22])]:

a) $D(z)$ ist regulär und von 0 verschieden für $|z| < 1$.

b) $D(0)$ ist reell und positiv.

c) Es ist fast überall im Intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$

$$\lim_{r=1} |D(re^{i\vartheta})|^2 = f(\vartheta).$$

Ich will jetzt eine Bezeichnungsweise einführen, die im folgenden oft gebraucht wird. Es sei $p(x)$ eine im Intervalle $-1 \leqq x \leqq 1$ definierte fast überall positive Funktion, für welche $\log p(\cos\vartheta)$ im Intervalle $0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi$ (L) integrabel ist. Man setze dann

$$\Delta(p;z) = e^{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} \log p(\cos\bar{\vartheta})\,\frac{1+ze^{-i\bar{\vartheta}}}{1-ze^{-i\bar{\vartheta}}}\,d\bar{\vartheta}}.$$

Diese Funktion besitzt analoge Eigenschaften, wie oben $D(z)$. Hat ferner $p(x)$ an einer inneren Stelle $\xi = \cos\vartheta_0$ des Intervalls $(-1, 1)$ einen stetigen zweiten Differentialquotienten, dann existiert

$$\lim_{r=1} \Delta(p; re^{i\vartheta_0}) = \Delta(p; e^{i\vartheta_0}),$$

$$\lim_{r=1} \Delta'(p; re^{i\vartheta_0}) = \Delta'(p; e^{i\vartheta_0})\ ^{21})$$

und es ist

$$\lim_{r=1} |\Delta(p; re^{i\vartheta_0})|^2 = |\Delta(p; e^{i\vartheta_0})|^2 = p(\cos\vartheta_0) = p(\xi)\ ^{22}).$$

---

[19]) Im folgenden werden die Buchstaben $\bar{\vartheta}$, $\bar{x}$ als Integrationsbuchstaben verwendet.

[20]) Vgl. G. Szegö, Über die Randwerte einer analytischen Funktion. Erscheint in den Mathematischen Annalen.

[21]) $\Delta'(p; z)$ bezeichnet die Ableitung von $\Delta(p; z)$ nach z.

[22]) Diese drei Gleichungen lassen sich vielleicht am einfachsten auf die folgende Weise ableiten.

(Fortsetzung der Fußnote 22 auf nächster Seite.)

Es gilt nun der folgende

Hilfssatz II. *Es sei $p(x)$ eine Funktion der Klasse (A)*[23]*, die einer inneren Stelle $\xi = \cos\vartheta_0$ des Intervalles $(-1, 1)$ zweimal stetig*

Die dritte Gleichung ist eine unmittelbare Folge des Schwarzschen Satzes über s Poissonsche Integral.

Die wesentlich weitergehende erste Gleichung ergibt sich unschwer aus einem n Herrn Lichtenstein verschärften Fatouschen Satze (vgl. Crelle Journal **141**, 12—42), nach welchem

$$\lim_{r=1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \frac{1+re^{-i\vartheta}}{1-re^{-i\vartheta}}\, d\vartheta$$

istiert, sobald $f(\vartheta)$ für $\vartheta = 0$ stetig ist und der Grenzwert

$$\lim_{\varepsilon=0} \int_{\varepsilon}^{\pi} \{f(\vartheta)-f(-\vartheta)\} \operatorname{ctg}\frac{\vartheta}{2}\, d\vartheta$$

istiert. In unserem Falle ist $f(\vartheta) = \log p[\cos(\vartheta+\vartheta_0)]$ sogar (zweimal) stetig ferenzierbar für $\vartheta = 0$, d. h. das Integral

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\vartheta)-f(0)}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\, d\vartheta$$

absolut konvergent. In diesem Falle folgt die Existenz von (*) mit Rücksicht f die Ungleichung

$$\left| \frac{1-e^{-i\vartheta}}{1-re^{-i\vartheta}} \right| \leqq 2 \qquad (0 \leqq \vartheta \leqq 2\pi;\ 0 \leqq r < 1)$$

sentlich einfacher, da ja für $r<1$, $\varepsilon>0$

$$\left| \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} [f(\vartheta)-f(0)] \frac{1+re^{-i\vartheta}}{1-re^{-i\vartheta}}\, d\vartheta \right| \leqq 2 \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{|f(\vartheta)-f(0)|}{\sin\frac{\vartheta}{2}}\, d\vartheta$$

und das Integral auf der rechten Seite strebt mit ε gegen 0.

Ähnlich ergibt sich aus der Voraussetzung, daß $f(\vartheta)$ *zweimal* stetig differenzier- r ist, die absolute Konvergenz von

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{f(\vartheta)-f(0)-f'(0)\vartheta}{\sin^2\frac{\vartheta}{2}}\, d\vartheta$$

d hieraus die Existenz von

$$\lim_{r=1} \int_{-\pi}^{\pi} f(\vartheta) \frac{e^{-i\vartheta}}{(1-re^{-i\vartheta})^2}\, d\vartheta.$$

n erhält daraus ohne Schwierigkeit, daß

$$\lim_{r=1} \Delta'(p; re^{i\vartheta_0})$$

istiert.

[23]) Vgl. Einleitung.

differenzierbar ist. Es sei ε eine beliebig kleine positive Zahl und $p_1(x)$, $p_2(x)$ die im Hilfssatz I *definierten Funktionen. Dann ist*

$$\text{a)} \qquad |\Delta(p_\alpha; e^{i\vartheta_0}) - \Delta(p; e^{i\vartheta_0})| < \eta_1(\varepsilon),$$

$$\text{b)} \qquad |\Delta'(p_\alpha; e^{i\vartheta_0}) - \Delta'(p; e^{i\vartheta_0})| < \eta_2(\varepsilon) \qquad (\alpha = 1, 2),$$

wobei $\eta_1(\varepsilon)$, $\eta_2(\varepsilon)$ Funktionen von ε bezeichnen, die mit ε beliebig klein werden.

Man setze zunächst

$$\mathsf{A}(z) = \frac{1+z}{1-z},$$

$$\mathsf{B}(z) = \frac{d}{dz}\frac{1+z}{1-z} = \frac{2}{(1-z)^2},$$

dann ist (vgl. Fußnote [22]))

$$(\cos\bar\vartheta - \cos\vartheta_0)^2 \,|\, \mathsf{A}(re^{i(\vartheta_0-\bar\vartheta)})\,| \leqq |1-\gamma|^2 \left|\frac{1+r\gamma}{1-r\gamma}\right| \leqq 4\left|\frac{1-\gamma}{1-r\gamma}\right| \leqq 8,$$

$$(\cos\bar\vartheta - \cos\vartheta_0)^2 \,|\, \mathsf{B}(re^{i(\vartheta_0-\bar\vartheta)})\,| \leqq |1-\gamma|^2 \frac{2}{|1-r\gamma|^2} \leqq 8$$

$$(\gamma = e^{i(\vartheta_0-\bar\vartheta)};\ r<1),$$

man hat ferner $(\alpha = 1, 2)$

$$\log\Delta(p_\alpha; e^{i\vartheta_0}) - \log\Delta(p; e^{i\vartheta_0}) = \lim_{r=1}[\log\Delta(p_\alpha; re^{i\vartheta_0}) - \log\Delta(p; re^{i\vartheta_0})]$$

$$= \lim_{r=1}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\log p_\alpha(\cos\bar\vartheta) - \log p(\cos\bar\vartheta)]\,\mathsf{A}(re^{i(\vartheta_0-\bar\vartheta)})\,d\bar\vartheta,$$

also nach Hilfssatz I

$$|\log\Delta(p_\alpha; e^{i\vartheta_0}) - \log\Delta(p; e^{i\vartheta_0})| \leqq \frac{8}{4\pi}\int_0^{2\pi}\frac{|\log p_\alpha(\cos\bar\vartheta) - \log p(\cos\bar\vartheta)|}{(\cos\vartheta_0 - \cos\bar\vartheta)^2}\,d\bar\vartheta$$

$$< \frac{4}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{|\log p_\alpha(x) - \log p(x)|}{(\xi - x)^2}\,\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} < \frac{4}{\pi}\,\varepsilon.$$

Da $|\Delta(p; e^{i\vartheta_0})|^2 = |\Delta(p_\alpha; e^{i\vartheta_0})|^2 = p(\cos\vartheta_0) = p(\xi) > 0$ ist, folgt hieraus ohne Schwierigkeit die Ungleichung a).

Um auch b) zu beweisen, genügt es offenbar, den Ausdruck

$$\frac{\Delta'}{\Delta}(p_\alpha; e^{i\vartheta_0}) - \frac{\Delta'}{\Delta}(p; e^{i\vartheta_0}) = \lim_{r=1}\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}[\log p_\alpha(\cos\bar\vartheta) - \log p(\cos\bar\vartheta)]\,\mathsf{B}(re^{i(\vartheta_0-\bar\vartheta)})$$

abzuschätzen, was analog, wie oben, geschieht. Damit ist der Hilfssatz II bewiesen.

§ 3.

Darstellung der Methode.

1. Es sei $p(x)$ eine im Intervalle $(-1, 1)$ definierte Funktion der lasse (A), die an einer inneren Stelle $\xi = \cos\vartheta_0$ dieses Intervalls zwei- al stetig differenzierbar ist. Es sei $F(x)$ eine Funktion, die im Inter- lle $(-1, 1)$ samt

$$\frac{[F(x)]^2}{p(x)}$$

) integrabel ist und λ, μ bezeichnen zwei reelle Parameter. Ich stelle e folgende *Maximum-Aufgabe*:

Man betrachte die Gesamtheit aller Polynome n-ten Grades $A_n(x)$ it reellen Koeffizienten, die der Bedingung

$$\int_{-1}^{1} p(x)[A_n(x)]^2 dx = 1$$

terworfen sind. Gefragt wird nach dem Maximum $\mathsf{M}_n(p; \lambda, \mu)$ von

$$[\lambda A_n(\xi) + \mu \int_{-1}^{1} F(x) A_n(x) dx]^2.$$

Die Antwort lautet:

$$\mathsf{M}_n(p; \lambda, \mu) = \sum_{\nu=0}^{n} \left[\lambda Q_\nu(\xi) + \mu \int_{-1}^{1} F(x) Q_\nu(x) dx\right]^2,$$

bei die $Q_n(x)$ die zu der Belegungsfunktion $p(x)$ gehörigen orthogonalen lynome sind, für welche

$$\int_{-1}^{1} p(x) Q_m(x) Q_n(x) dx = \begin{cases} 0 & \text{für } m \gtrless n, \\ 1 & \text{für } m = n \end{cases} \quad (m, n = 0, 1, 2, \ldots)$$

. (Vgl. die Einleitung.)

Es sei in der Tat

$$A_n(x) = t_0 Q_0(x) + t_1 Q_1(x) + \ldots + t_n Q_n(x),$$

bei die t_ν beliebige reelle Zahlen bezeichnen, die der Bedingung,

$$\int_{-1}^{1} p(x)[A_n(x)]^2 dx = t_0^2 + t_1^2 + \ldots + t_n^2 = 1$$

nügen. Man hat

$$\lambda A_n(\xi) + \mu \int_{-1}^{1} F(x) A_n(x) dx = \sum_{\nu=0}^{n} t_\nu [\lambda Q_\nu(\xi) + \mu \int_{-1}^{1} F(x) Q_\nu(x) dx],$$

raus nach Anwendung der Schwarzschen Ungleichung unsere Behauptung ne Schwierigkeit folgt.

Der Ausdruck $\mathsf{M}_n(p;\lambda,\mu)$ läßt sich auch in der Form

$$\mathsf{M}_n(p;\lambda,\mu) = K_n(p;\xi)\lambda^2 + 2S_n(p;\xi)\lambda\mu + H_n(p)\mu^2 \tag{1}$$

schreiben, wobei

$$K_n(p;\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} [Q_\nu(\xi)]^2,$$

$$S_n(p;\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu(\xi) \int_{-1}^{1} F(x) Q_\nu(x)\, dx,$$

$$H_n(p) = \sum_{\nu=0}^{n} \left[\int_{-1}^{1} F(x) Q_\nu(x)\, dx\right]^2$$

ist; $K_n(p;\xi)$ bezeichnet hier die Quadratsumme der zu $p(x)$ gehörigen n ersten orthogonalen Polynome, $S_n(p;\xi)$ die n-te Partialsumme der Entwicklung von

$$\frac{F(x)}{p(x)}$$

an der Stelle ξ (in dem in der Einleitung festgestellten Sinne) und $H_n(p)$ die Quadratsumme der Koeffizienten dieser Entwicklung. Man hat nach der Besselschen Ungleichung

$$H_n(p) \leqq H(p) = \int_{-1}^{1} \frac{[F(x)]^2}{p(x)}\, dx. \tag{2}$$

2. Es sei nun ε eine beliebig kleine positive Zahl und $p_1(x)$, $p_2(x)$ bezeichnen die im Hilfssatz I definierten, zu $p(x)$ gehörigen Funktionen. Dann können für die Funktionen $p_1(x)$ bzw. $p_2(x)$ und $F(x)$ ähnliche Maximum-Aufgaben gestellt werden, wie in **1.** für $p(x)$ und $F(x)$. Es gelten ferner mit Rücksicht auf Hilfssatz I a) für die Lösungen $\mathsf{M}_n(p_\alpha;\lambda,\mu)$ $(\alpha = 1, 2)$ dieser Maximum-Aufgaben folgende Ungleichungen:

$$\mathsf{M}_n(p_2;\lambda,\mu) \leqq \mathsf{M}_n(p;\lambda,\mu) \leqq \mathsf{M}_n(p_1;\lambda,\mu), \tag{3}$$

und zwar für jeden Wert der Parameter λ, μ. Man setze

$$\mathsf{M}_n(p_\alpha;\lambda,\mu) = K_n(p_\alpha;\xi)\lambda^2 + 2S_n(p_\alpha;\xi)\lambda\mu + H_n(p_\alpha)\mu^2 \quad (\alpha = 1, 2),$$

wobei die $K_n(p_\alpha;\xi)$, $S_n(p_\alpha;\xi)$, $H_n(p_\alpha)$ analoge Bedeutung haben, wie $K_n(p;\xi)$ usw. Man hat also

$$\begin{aligned} &K_n(p_2;\xi)\lambda^2 + 2S_n(p_2;\xi)\lambda\mu + H_n(p_2)\mu^2 \leqq K_n(p;\xi)\lambda^2 + 2S_n(p;\xi)\lambda\mu \\ &+ H_n(p)\mu^2 \leqq K_n(p_1;\xi)\lambda^2 + 2S_n(p_1;\xi)\lambda\mu + H_n(p_1)\mu^2 \end{aligned} \tag{3'}$$

Daraus ergeben sich die Ungleichungen

$$K_n(p_2;\xi) \leqq K_n(p;\xi) \leqq K_n(p_1;\xi), \tag{4}$$

$$H_n(p_2) \leqq H_n(p) \leqq H_n(p_1)$$

$$[S_n(p;\xi) - S_n(p_2;\xi)]^2 \leqq [H_n(p) - H_n(p_2)][K_n(p;\xi) - K_n(p_2;\xi)]$$
$$\leqq H_n(p)[K_n(p;\xi) - K_n(p_2;\xi)]$$
$$\leqq H(p)[K_n(p;\xi) - K_n(p_2;\xi)].$$

3. Ich behaupte nun, daß der Beweis unseres Theorems, welches in r Einleitung formuliert wurde, sich auf den Beweis der folgenden Sätze rückführen läßt:

Satz I. *Es sei $p(x)$ eine Funktion der Klasse (A), die an einer neren Stelle ξ des Intervalles $(-1, 1)$ zweimal stetig differenzierbar ist. sei ε eine beliebig kleine positive Zahl und $p_1(x)$, $p_2(x)$ bezeichnen e in Hilfssatz I definierten Funktionen. Dann gilt für die Quadratmmen*

$$K_n(p_\alpha;\xi) = \sum_{\nu=0}^{n} [Q_\nu^{(\alpha)}(\xi)]^2 \qquad (\alpha = 1, 2)$$

r zu $p_\alpha(x)$ gehörigen Polynome $Q_\nu^{(\alpha)}(x)$ $(\alpha = 1, 2)$ an der Stelle ξ eine ngleichung

$$0 \leqq K_n(p_1;\xi) - K_n(p_2;\xi) < \eta(\varepsilon);$$

ε) bezeichnet hier eine Funktion von ε, die nicht mehr von n abhängt d mit ε gegen 0 strebt.

Satz II. *Es sei $p_2(x)$ eine Funktion von der in Hilfssatz I eingeführten Form*

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P_2(x)},$$

bei $P_2(x)$ ein für $-1 \leqq x \leqq 1$ positives Polynom bezeichnet. Es ien $Q_n^{(2)}(x)$ die zu $p_2(x)$ gehörigen orthogonalen Polynome und $F(x)$ zeichne eine (L) integrable Funktion. Dann ist für alle x im Innern s Intervalls $-1, 1$ $(x = \cos\vartheta;\ 0 < \vartheta < \pi)$

$$\lim_{n=\infty} \Bigg[\sum_{\nu=0}^{n}{}' Q_\nu^{(2)}(x) \int_{-1}^{1} F(\bar{x}) Q_\nu^{(2)}(\bar{x})\, d\bar{x}$$

$$\frac{1}{p_2(x)\sqrt{1-x^2}} \sum_{\nu=0}^{n}{}' \cos\nu\vartheta \cdot \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{1} F(\cos\bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta} \cos\nu\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta} \Bigg] = 0.$$

In der Tat nehmen wir für einen Augenblick diese Sätze als bewiesen . Es sei $f(x)$ eine Funktion, für welche $p(x)[f(x)]^2$ (mithin auch $x) f(x)$) (L) integrabel ist. Man setze

$$F(x) = p(x) f(x).$$

Diese Funktion genügt alsdann den in **1.** gestellten Bedingungen. Es sei ferner

$$f(x) \sim c_0 Q_0(x) + c_1 Q_1(x) + \ldots + c_n Q_n(x) + \ldots \quad [c_n = \int_{-1}^{1} p(x) f(x) Q_n(x) d$$

die Entwicklung von $f(x)$ nach den orthogonalen Polynomen $Q_n(x)$, die zu $p(x)$ gehören. Dann ist offenbar mit unserer oben eingeführten Bezeichnungsweise

$$S_n(p; \xi) = \sum_{\nu=0}^{n} c_\nu Q_\nu(\xi)$$

und

$$S_n(p_2; \xi) = \sum_{\nu=0}^{n} Q_\nu^{(2)}(\xi) \int_{-1}^{1} p(x) f(x) Q_\nu^{(2)}(x) dx,$$

außerdem ist $p(\xi) = p_2(\xi)$. Unser Theorem wird also, mit Rücksicht auf Satz II, bewiesen, wenn wir zeigen können, daß

$$\lim_{n=\infty} [S_n(p; \xi) - S_n(p_2; \xi)] = 0$$

ist. Nun folgt aber aus (6) wegen Satz I

$$\limsup_{n=\infty} | S_n(p; \xi) - S_n(p_2; \xi) | < \sqrt{H(p)\eta(\varepsilon)}$$

und da $\eta(\varepsilon)$ sich mit ε beliebig klein machen läßt,

$$\lim_{n=\infty} [S_n(p; \xi) - S_n(p_2; \xi)] = 0.$$

Alles geht somit darauf hinaus, die Sätze I und II, die sich ja auf die speziellen Belegungsfunktionen $p_1(x)$ und $p_2(x)$ beziehen, zu beweisen. Dies wird im Kapitel II gezeigt werden.

Kapitel II.

Über zwei Typen von Belegungsfunktionen.

In diesem Kapitel will ich zwei Typen von Belegungsfunktionen betrachten, bei welchen man die zugehörigen orthogonalen Polynome (wenigstens von einem gewissen Index an) direkt berechnen kann und für die auch die Entwicklungsfrage äußerst einfach zu erledigen ist. Diese sind

$$p_1(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{P_1(x)} \quad \text{und} \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P_2(x)} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

wobei $P_1(x)$ und $P_2(x)$ für $-1 \leqq x \leqq 1$ positive Polynome bezeichnen. Ich werde mich zunächst mit der Belegungsfunktion

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)} \qquad (-1 \leqq x \leqq 1),$$

schäftigen, unter $P(x)$ ein für $-1 < x < 1$ positives Polynom verstanden. s ihr gehen die vorhin definierten Belegungsfunktionen hervor, indem n

$$P(x) = P_1(x)$$

w.

$$P(x) = (1 - x^2) P_2(x)$$

zt.

§ 4.

er die orthogonalen Polynome, die zu der Belegungsfunktion $\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}$ gehören.

Es sei $P(x)$ ein Polynom k-ten (und nicht niedrigeren) Grades, lches im Innern des Intervalls $(-1, 1)$ positiv ist und an den Endnkten $x = \pm 1$ höchstens von der ersten Ordnung verschwindet. Dann $P(\cos\vartheta)$ ein nichtnegatives trigonometrisches (Kosinus-) Polynom k-ter dnung. Man hat somit nach einem Satz von Fejér[24])

$$P(\cos\vartheta) = |\tau(z)|^2 = [c(\vartheta)]^2 + [s(\vartheta)]^2 \qquad (z = e^{i\vartheta}),$$

bei

$$\tau(z) = \tau_0 + \tau_1 z + \ldots + \tau_k z^k \qquad (\tau_0 \neq 0,\ \tau_k \neq 0)$$

Polynom k-ten Grades mit reellen Koeffizienten und

$$c(\vartheta) = \tau_0 + \tau_1 \cos\vartheta + \ldots + \tau_k \cos k\vartheta,$$
$$s(\vartheta) = \quad \tau_1 \sin\vartheta + \ldots + \tau_k \sin k\vartheta$$

njugierte Kosinus- bzw. Sinuspolynome k-ter Ordnung bezeichnen, die reellen und imaginären Komponenten von $\tau(e^{i\vartheta})$ sind, d. h.

$$\tau(e^{i\vartheta}) = c(\vartheta) + i\, s(\vartheta).$$

sei das Polynom $\tau(z)$ für $|z| \leqq 1$ von 0 verschieden (mit eventueller snahme der Punkte $z = \pm 1$, wo es höchstens von der ersten Ordnung rschwinden kann), ferner $\tau(0)$ reell und positiv. (Durch diese Forderungen $\tau(z)$ *eindeutig* bestimmt.) Ich behaupte dann den

Satz 1. *Die zu der Belegungsfunktion*

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}$$

örigen orthogonalen Polynome, wobei $P(x)$ ein für $-1 < x < 1$ positives, für $x = \pm 1$ höchstens von der ersten Ordnung verschwindendes

---

[24]) Vgl. Fußnote [18]).

Polynom k-ten Grades bezeichnet, lassen sich für $n > \frac{k}{2} - 1$ durch folgende Formel gewinnen:

$$\sin\vartheta\, Q_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, \Im\, e^{i(n+1)\vartheta}\, \tau(e^{-i\vartheta})$$

$$= \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[-s(\vartheta)\cos(n+1)\vartheta + c(\vartheta)\sin(n+1)\vartheta]^{25}).$$

Der rechtsstehende Ausdruck läßt sich auch in der Form

$$\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[\tau_0 \sin(n+1)\vartheta + \tau_1 \sin n\vartheta + \ldots + \tau_k \sin(n+1-k)\vartheta]$$

schreiben und hieraus ist es ersichtlich, daß dieser stets ein Sinuspolynom $(n+1)$-ter Ordnung darstellt; $Q_n(x)$ wird somit mit Hilfe der obigen Formel tatsächlich als ein Polynom n-ten Grades definiert.

Um diese Formel zu beweisen, genügt es bekanntlich, die Orthogonalitätseigenschaft

$$(1) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}\, Q_n(x)\, x^\nu\, dx = 0 \qquad \left(0 \leqq \nu \leqq n-1;\ n > \frac{k}{2} - 1\right)$$

und die weitere Gleichung

$$(2) \qquad \int_{-1}^{1} \frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}\, Q_n^2(x)\, dx = 1 \qquad \left(n > \frac{k}{2} - 1\right)$$

nachzuweisen.

Die Gleichungen (1) lassen sich offenbar in der folgenden Form schreiben:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\, Q_n(\cos\vartheta)}{P(\cos\vartheta)} \sin\vartheta \cos^\nu\vartheta\, d\vartheta = 0 \qquad \left(0 \leqq \nu \leqq n-1;\ n > \frac{k}{2} - 1\right);$$

diese Gleichungen sind, da $\sin\vartheta\cos^\nu\vartheta$ ein Sinuspolynom $(\nu+1)$-ter Ordnung und umgekehrt ein solches Sinuspolynom stets von der Form $\sin\vartheta\, A(\cos\vartheta)$ ($A(x)$ ein Polynom ν-ten Grades) ist, mit den folgenden äquivalent:

$$\int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta\, Q_n(\cos\vartheta)}{P(\cos\vartheta)} \sin\nu\vartheta\, d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{\sin\vartheta\, Q_n(\cos\vartheta)}{P(\cos\vartheta)} \sin\nu\vartheta\, d\vartheta = 0$$

$$\left(1 \leqq \nu \leqq n;\ n > \frac{k}{2} - 1\right).$$

---

[25]) Man zeigt leicht, daß diese Formel (abgesehen von einem konstanten Faktor) auch für $n = \frac{k}{2} - 1$ (k gerade) gilt.

e Gleichungen (1) sind also bewiesen, wenn wir zeigen können, daß

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(n+1)\vartheta}\,\tau(e^{-i\vartheta})}{|\tau(e^{i\vartheta})|^2}(e^{i\nu\vartheta} - e^{-i\nu\vartheta})\,d\vartheta = 0 \qquad (1 \leqq \nu \leqq n;\ n > \frac{k}{2} - 1)$$

Das letzte Integral läßt sich aber (nach Multiplikation mit i) auf die gende Form bringen:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{in\vartheta}}{\tau(e^{i\vartheta})}(e^{i\nu\vartheta} - e^{-i\nu\vartheta})\,i\,e^{i\vartheta}\,d\vartheta = \int_{|z|=1} \frac{z^n\left(z^\nu - \frac{1}{z^\nu}\right)}{\tau(z)}\,dz,$$

bei das Integral rechter Hand im Cauchyschen Sinne zu nehmen ist. die Funktion

$$\frac{z^{n+\nu} - z^{n-\nu}}{\tau(z)}$$

$|z| \leqq 1$ (auch an den Stellen $z = \pm 1$) regulär ist, folgt hieraus die hauptung.

Um auch die Gleichung (2) nachzuweisen, berechnen wir das Integral

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}\,Q_n^2(x)\,dx = \int_0^{\pi} \frac{\sin\vartheta}{P(\cos\vartheta)}\,Q_n^2(\cos\vartheta)\sin\vartheta\,d\vartheta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi} \frac{[\sin\vartheta\,Q_n(\cos\vartheta)]^2}{P(\cos\vartheta)}\,d\vartheta$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} \frac{[\Im\, e^{i(n+1)\vartheta}\,\tau(e^{-i\vartheta})]^2}{|\tau(e^{i\vartheta})|^2}\,d\vartheta.$$

dererseits ist unter z eine beliebige komplexe Zahl verstanden,

$$(\Im z)^2 = \frac{|z|^2 - \Re z^2}{2}$$

ser Integral reduziert sich somit auf das folgende:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{|e^{i(n+1)\vartheta}\,\tau(e^{-i\vartheta})|^2}{|\tau(e^{i\vartheta})|^2}\,d\vartheta - \frac{1}{2\pi}\,\Re\int_0^{2\pi} \frac{e^{2i(n+1)\vartheta}\,[\tau(e^{-i\vartheta})]^2}{|\tau(e^{i\vartheta})|^2}\,d\vartheta.$$

s erste Glied ist offenbar gleich 1, das zweite Integral läßt sich in der genden Form schreiben:

$$\int_0^{2\pi} \frac{e^{i(2n+2)\vartheta}\,\tau\left(\frac{1}{e^{i\vartheta}}\right)}{\tau(e^{i\vartheta})}\,d\vartheta = \frac{1}{i}\int_{|z|=1} \frac{z^{2n+1}\,\tau\left(\frac{1}{z}\right)}{\tau(z)}\,dz.$$

n ist aber die Funktion

$$\frac{z^{2n+1}\,\tau\left(\frac{1}{z}\right)}{\tau(z)}$$

regulär für $|z| \leqq 1$[26]), mithin verschwindet dieses Integral. Daraus folgt die Gleichung (2) und somit der Satz 1.

§ 5.

Über die Quadratsumme der orthogonalen Polynome.

Unsere nächste Aufgabe ist, die Summe

$$K_n(x) = [Q_0(x)]^2 + [Q_1(x)]^2 + \ldots + [Q_n(x)]^2$$

zu berechnen, welche, wie in § 3 gezeigt wurde, in unseren Betrachtungen eine wesentliche Rolle spielt. $Q_n(x)$ hat hier durchwegs die in § 4 angegebene Bedeutung, $x = \cos\vartheta$ bezeichnet eine feste Stelle im Innern des Intervalls $(-1, 1)$.

Man hat nach der Christoffelschen Formel[27])

$$K_n(x) = \frac{l_n}{l_{n+1}} [Q'_{n+1}(x)\, Q_n(x) - Q'_n(x)\, Q_{n+1}(x)],$$

wobei $l_n > 0$ den höchsten Koeffizient von $Q_n(x)$, d. h. den Koeffizient von x^n bezeichnet. Nun folgt aus Satz 1, mit Rücksicht darauf, daß

$$\frac{\sin(n+1)\vartheta}{\sin\vartheta}$$

ein Polynom n-ten Grades von $\cos\vartheta$ mit dem höchsten Koeffizient 2^n ist, daß für $n > \frac{k}{2} - 1$

$$l_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\, 2^n \tau_0,$$

also

$$\frac{l_n}{l_{n+1}} = \frac{1}{2},$$

d. h.

$$K_n(x) = \frac{Q'_{n+1}(x)\, Q_n(x) - Q'_n(x)\, Q_{n+1}(x)}{2}$$

ist.

Andererseits hat man

$$\sin\vartheta\, Q_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} [-s(\vartheta)\cos(n+1)\vartheta + c(\vartheta)\sin(n+1)\vartheta]$$

und

$$\begin{aligned} &\cos\vartheta\, Q_n(\cos\vartheta) - \sin^2\vartheta\, Q'_n(\cos\vartheta) \\ &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} [-s'(\vartheta)\cos(n+1)\vartheta + c'(\vartheta)\sin(n+1)\vartheta] \\ &+ \sqrt{\frac{2}{\pi}} (n+1) [s(\vartheta)\sin(n+1)\vartheta + c(\vartheta)\cos(n+1)\vartheta]. \end{aligned}$$

[26]) Auch für $z = \pm 1$.

[27]) Vgl. etwa O. Perron, Die Lehre von den Kettenbrüchen (Leipzig und Berlin: Teubner, 1913). S. 381.

raus ergibt sich nach einer leichten Rechnung der folgende

Satz 2. *Die Quadratsumme $K_n(x)$ der $n+1$ ersten orthogonalen olynome, die zu der Belegungsfunktion*

$$\frac{\sqrt{1-x^2}}{P(x)}$$

ören, wobei $P(x)$ ein für $-1 < x < 1$ positives — für $x = \pm 1$ höchstens n der ersten Ordnung verschwindendes — Polynom k-ten Grades be-chnet, läßt sich für $n > \frac{k}{2} - 1$ aus folgender Formel entnehmen:

$$\pi \sin^3\vartheta\, K_n(\cos\vartheta) = (n+1)\sin\vartheta\, P(\cos\vartheta) + A_n[c(\vartheta)]^2 + B_n[s(\vartheta)]^2 + C_n c(\vartheta)s(\vartheta) + D_n c'(\vartheta)s(\vartheta) + E_n c(\vartheta)s'(\vartheta),$$

bei $c(\vartheta)$ und $s(\vartheta)$ die in § 4 definierten trigonometrischen Polynome eichnen und A_n, B_n, C_n, D_n, E_n von $P(x)$ unabhängig (nur von n d ϑ abhängig) sind; und zwar ist

$$A_n = -\sin(n+1)\vartheta\cos(n+2)\vartheta,$$
$$B_n = \sin(n+2)\vartheta\cos(n+1)\vartheta,$$
$$C_n = \cos(2n+3)\vartheta, \quad D_n = -E_n = \sin\vartheta.$$

§ 6.

Beweis von Satz I.

Ich will nun den im § 3, **3.** formulierten Satz I beweisen, der sich auf Quadratsumme der orthogonalen Polynome bezieht, die zu den im lfssatz I definierten Belegungsfunktionen

$$p_1(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{P_1(x)} \quad \text{und} \quad p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\frac{1}{P_2(x)}$$

ören; $P_1(x)$ und $P_2(x)$ bezeichnen hier zwei Polynome k_1- bzw. k_2-ten d nicht niedrigeren) Grades, die für $-1 \leqq x \leqq 1$ positiv sind. Es sei

$$P_1(\cos\vartheta) = |\tau_1(e^{i\vartheta})|^2 = [c_1(\vartheta)]^2 + [s_1(\vartheta)]^2$$

$$P_2(\cos\vartheta) = |\tau_2(e^{i\vartheta})|^2 = [c_2(\vartheta)]^2 + [s_2(\vartheta)]^2,$$

bei $\tau_1(z)$, $c_1(\vartheta)$ usw. analoge Bedeutung haben, wie $\tau(z)$, $c(\vartheta)$ usw. im Es ist $\tau_\alpha(z) \neq 0$ für $|z| \leqq 1$ $(\alpha = 1, 2)$.

Diese Belegungsfunktionen gehen aus der in §§ 4 und 5 behandelten vor, indem dort

$$P(x) = P_1(x) \quad \text{bzw.} \quad P(x) = (1-x^2)P_2(x),$$

oder wegen

$$1-\cos^2\vartheta=\left|\frac{1-z^2}{2}\right|^2_{z=e^{i\vartheta}},$$

$$\tau(z)=\tau_1(z) \quad \text{bzw.} \quad \tau(z)=\frac{1-z^2}{2}\tau_2(z)$$

gesetzt wird. Ich setze nun der Symmetrie halber

$$\tau_2^*(z)=\frac{1-z^2}{2}\tau_2(z)$$

und

$$\tau_2^*(e^{i\vartheta})=c_2^*(\vartheta)+i\,s_2^*(\vartheta).$$

Dann folgt aus Satz 2 für die in § 3, **3.** eingeführten Quadratsummen $K_n(p_\alpha;x)$ $(\alpha=1,2)$ die folgende Darstellung:

$$\pi\sin^3\vartheta\,K_n(p_1;\cos\vartheta)=\frac{(n+1)\sin^2\vartheta}{p_1(\cos\vartheta)}+A_n[c_1(\vartheta)]^2+B_n[s_1(\vartheta)]^2$$
$$+C_n c_1(\vartheta)s_1(\vartheta)+D_n c_1'(\vartheta)s_1(\vartheta)+E_n c_1(\vartheta)s_1'(\vartheta),$$

$$\pi\sin^3\vartheta\,K_n(p_2;\cos\vartheta)=\frac{(n+1)\sin^2\vartheta}{p_2(\cos\vartheta)}+A_n[c_2^*(\vartheta)]^2+B_n[s_2^*(\vartheta)]^2$$
$$+C_n c_2^*(\vartheta)s_2^*(\vartheta)+D_n c_2^{*\prime}(\vartheta)s_2^*(\vartheta)+E_n c_2^*(\vartheta)s_2^{*\prime}(\vartheta).$$

Hierbei ist $n>\operatorname{Max}\left(\frac{k_1}{2}-1,\frac{k_2}{2}\right)$. Daraus ergibt sich insbesondere für $x=\xi=\cos\vartheta_0$ $(0<\vartheta_0<\pi)$ mit Rücksicht auf Hilfssatz I c)

$$\pi\sin^3\vartheta_0[K_n(p_1;\xi)-K_n(p_2;\xi)]=A_n^{(0)}\{[c_1(\vartheta_0)]^2-[c_2^*(\vartheta_0)]^2\}$$
$$+B_n^{(0)}\{[s_1(\vartheta_0)]^2-[s_2^*(\vartheta_0)]^2\}+\ldots,$$

wobei $A_n^{(0)}, B_n^{(0)}, \ldots$, die Ausdrücke bezeichnen, die aus $A_n, B_n, \ldots$ für $\vartheta=\vartheta_0$ hervorgehen.

Wir wollen nun Hilfssatz II heranziehen. Es ist zunächst

$$\Delta(p_1;z)=\frac{1}{\tau_1(z)}\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}$$

und

$$\Delta(p_2;z)=\frac{1}{\tau_2(z)}\sqrt{\frac{2}{1-z^2}},$$

d. h.

$$\tau_1(z)=\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}\,\frac{1}{\Delta(p_1;z)}$$

und

$$\tau_2^*(z)=\frac{1-z^2}{2}\tau_2(z)=\sqrt{\frac{1-z^2}{2}}\,\frac{1}{\Delta(p_2;z)}.$$

Daraus folgt, daß

$$\lim\tau_1(e^{i\vartheta_0})=\lim\tau_2^*(e^{i\vartheta_0})$$

existiert, wenn ε gegen 0 strebt und dasselbe gilt für die Ableitungen

die Ausdrücke $A_n^{(0)}$, $B_n^{(0)}$, ... für alle n beschränkt sind, folgt hieraus, 3 die Differenz $K_n(p_1;\xi) - K_n(p_2;\xi)$ mit ε gegen 0 strebt.

Damit ist unser Satz I bewiesen.

Gleichzeitig ergibt sich ohne Mühe mit Rücksicht auf die Unichungen (4) von § 3 der folgende

Satz I'. *Es sei $p(x)$ eine Funktion der Klasse (A), die an einer eren Stelle $\xi = \cos\vartheta_0$ des Intervalls $(-1,1)$ zweimal stetig differenzier- ist. Es seien ferner $Q_n(x)$ die zugehörigen orthogonalen Polynome. nn ist*

$$\sin^3\vartheta_0\, K_n(p;\xi) = \pi\sin^3\vartheta_0 \sum_{\nu=0}^{n}{}' [Q_\nu(\cos\vartheta_0)]^2 = \frac{(n+1)\sin^2\vartheta_0}{p(\cos\vartheta_0)} + A_n^{(0)}[c(\vartheta_0)]^2$$

$$B_n^{(0)}[s(\vartheta_0)]^2 + C_n^{(0)} c(\vartheta_0) s(\vartheta_0) + D_n^{(0)} c'(\vartheta_0) s(\vartheta_0) + E_n^{(0)} c(\vartheta_0) s'(\vartheta_0) + \varepsilon_n,$$

bei $A_n^{(0)}$, $B_n^{(0)}$, ... die obige Bedeutung haben und

$$c(\vartheta_0) + i s(\vartheta_0) = \sqrt{\frac{1 - e^{2i\vartheta_0}}{2}\,\frac{1}{\Delta(p; e^{i\vartheta_0})}}$$

etzt wird (analog werden $c'(\vartheta_0)$ und $s'(\vartheta_0)$ definiert; vgl. § 2); *endlich ist*

$$\lim_{n=\infty} \varepsilon_n = 0\ ^{28}).$$

§ 7.

Beweis von Satz II.

1. Wir wollen jetzt den letzten Schritt zum Beweis des in der Einung ausgesprochenen Theorems tun, indem wir den in § 3, **3.** formuten Satz II beweisen.

Es folgt zunächst aus Satz 1 für die zur Belegungsfunktion

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}\,\frac{1}{P_2(x)}$$

örigen orthogonalen Polynome $Q_n^{(2)}(x)$ die folgende Darstellung

$$\vartheta\, Q_n^{(2)}(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Im\, e^{i(n+1)\vartheta}\,\tau_2^*(e^{-i\vartheta}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Im\, e^{i(n+1)\vartheta}\,\frac{1-e^{-2i\vartheta}}{2}\,\tau_2(e^{-i\vartheta}),$$

bei $\tau_2(z)$ und $\tau_2^*(z)$ die in § 6 gegebene Bedeutung haben. Diese mel gilt für

$$n > \frac{k_2+2}{2} - 1, \quad \text{d. h. für} \quad n > \frac{k_2}{2},$$

---

[28]) Aus diesem Satz läßt sich auch die in der Fußnote [13]) angegebene asymptoe Formel der Polynome $Q_n(x)$ ableiten. Ferner ergibt sich hieraus der folgende ressante Grenzwertsatz:

$$\lim_{n=\infty} \frac{Q_0^2(\xi) + Q_1^2(\xi) + \ldots + Q_n^2(\xi)}{n+1} = \frac{1}{\pi\, p(\xi)\sqrt{1-\xi^2}}.$$

wenn k_2 den (echten) Grad von $P(x)$ bezeichnet[29]). Da ferner

$$\frac{1-e^{-2i\vartheta}}{2} = i\sin\vartheta\, e^{-i\vartheta}$$

ist, folgt hieraus

$$Q_n^{(2)}(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Re\, e^{in\vartheta}\tau_2(e^{-i\vartheta}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[c_2(\vartheta)\cos n\vartheta + s_2(\vartheta)\sin n\vartheta].$$

2. Ich will nun der Einfachheit halber die Indizes 2 überall weglassen und den Satz II folgendermaßen formulieren:

Es sei $P(x)$ ein für $-1 \leqq x \leqq 1$ positives Polynom k-ten (und nicht niedrigeren) Grades und $F(x)$ eine im Intervalle $(-1, 1)$ (L) integrable Funktion. Man bezeichne mit $s_n(x)$ die n-te Partialsumme der Entwicklung

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} Q_\nu(x) \int_{-1}^{1} F(\bar{x}) Q_\nu(\bar{x})\, d\bar{x},$$

wobei $Q_n(x)$ die zu der Belegungsfunktion

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P(x)}$$

gehörigen orthogonalen Polynome bezeichnen.

Es bezeichne ferner $\sigma_n(x) = \sigma_n(\cos\vartheta)$ die n-te Partialsumme der Kosinusreihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty}{}' \cos\nu\vartheta\, \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} F(\cos\bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta} \cos\nu\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta}.$$

Dann ist für $-1 < x < 1$

$$\lim_{n=\infty} [s_n(x) - P(x)\sigma_n(x)] = 0.$$

Hier ist

$$Q_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\Re\, e^{in\vartheta}\tau(e^{-i\vartheta}) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[c(\vartheta)\cos n\vartheta + s(\vartheta)\sin n\vartheta] \quad \left(n > \frac{k}{2}\right),$$

wobei

$$P(\cos\vartheta) = |\tau(e^{i\vartheta})|^2 \quad [\tau(z) \neq 0 \text{ für } |z| \leqq 1,\ \tau(0) > 0]$$

und

$$\tau(e^{i\vartheta}) = c(\vartheta) + i\,s(\vartheta), \quad \text{d. h.} \quad P(\cos\vartheta) = [c(\vartheta)]^2 + [s(\vartheta)]^2$$

ist. Man setze ferner

$$\tau(z) = \tau_0 + \tau_1 z + \ldots + \tau_k z^k \qquad (\tau_0 > 0,\ \tau_k \neq 0),$$

dann ist

$$Q_n(\cos\vartheta) = \sqrt{\frac{2}{\pi}}\,[\tau_0\cos n\vartheta + \tau_1\cos(n-1)\vartheta + \ldots + \tau_k\cos(n-k)\vartheta].$$

[29]) Diese Formel gilt (abgesehen von einem konstanten Faktor) auch für $n = \frac{k_2}{2}$ (k_2 gerade). Vgl. die Fußnote [25]).

Der Beweis von Satz II stützt sich ebenfalls auf die Christoffel-e Formel[30]), wie der von Satz I. Man hat

$$s_n(x) = \frac{l_n}{l_{n+1}} \int_{-1}^{1} F(\bar{x}) \frac{Q_{n+1}(x) Q_n(\bar{x}) - Q_n(x) Q_{n+1}(\bar{x})}{x - \bar{x}} d\bar{x},$$

bei l_n den höchsten Koeffizient von $Q_n(x)$ bezeichnet. Nun ist für $n > \frac{k}{2}$

$$l_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \cdot 2^{n-1} \tau_0,$$

n.

$$s_n(x) = \frac{1}{2} \int_{-1}^{1} F(\bar{x}) \frac{Q_{n+1}(x) Q_n(\bar{x}) - Q_n(x) Q_{n+1}(\bar{x})}{x - \bar{x}} d\bar{x} \qquad \left(n > \frac{k}{2}\right).$$

setze

$$(\vartheta, \bar{\vartheta}) = [c(\vartheta) \cos(n+1)\vartheta + s(\vartheta) \sin(n+1)\vartheta][c(\bar{\vartheta}) \cos n\bar{\vartheta} + s(\bar{\vartheta}) \sin n\vartheta]$$
$$[c(\vartheta) \cos n\vartheta + s(\vartheta) \sin n\vartheta][c(\bar{\vartheta}) \cos(n+1)\bar{\vartheta} + s(\bar{\vartheta}) \sin(n+1)\bar{\vartheta}],$$

n ist

$$s_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(\cos\bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta} \frac{\Phi_n(\vartheta, \bar{\vartheta})}{\cos\vartheta - \cos\bar{\vartheta}} d\bar{\vartheta} = 0.$$

n hat ferner nach bekannten Formeln

$$_n(\cos\vartheta) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(\cos\bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta} \left[\frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}}{2\sin\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}} + \frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}}{2\sin\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}} \right] d\bar{\vartheta}.$$

benutze jetzt das fundamentale Lemma aus der Theorie der Fourier-en Reihen, wonach für jede im Intervalle $(0, \pi)$ (L) integrable Funk-n $\varphi(\vartheta)$ die Gleichungen

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} \varphi(\bar{\vartheta}) \cos n\bar{\vartheta} \, d\bar{\vartheta} = \lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} \varphi(\bar{\vartheta}) \sin n\bar{\vartheta} \, d\bar{\vartheta} = 0$$

en. Daraus folgt offenbar, da $\sin\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}$ für $0 \leqq \bar{\vartheta} \leqq \pi$ oberhalb einer tiven Zahl bleibt (wenn ϑ eine feste Stelle im Innern des Intervalles π) bezeichnet), daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} F(\cos\bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta} \frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}}{2\sin\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}} d\bar{\vartheta} = 0$$

---

[30]) Vgl. Fußnote [27]).

ist. Der zu beweisende Satz lautet somit

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} F(\cos\bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta} \left[\frac{\Phi_n(\vartheta,\bar{\vartheta})}{\cos\vartheta - \cos\bar{\vartheta}} - P(\cos\vartheta) \frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}}{2\sin\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}} \right] d\bar{\vartheta} = 0.$$

Ich führe jetzt die Funktion

$$\Psi_n(\vartheta,\bar{\vartheta}) = [c(\vartheta)\cos(n+1)\vartheta + s(\vartheta)\sin(n+1)\vartheta][c(\vartheta)\cos n\bar{\vartheta} + s(\vartheta)\sin n\bar{\vartheta}]$$
$$- [c(\vartheta)\cos n\vartheta + s(\vartheta)\sin n\vartheta]\cdot[c(\vartheta)\cos(n+1)\bar{\vartheta} + s(\vartheta)\sin(n+1)\bar{\vartheta}]$$

ein, die man offenbar auch in der Form

$$\Psi_n(\vartheta,\bar{\vartheta}) = \{[c(\vartheta)]^2 + [s(\vartheta)]^2\}\{\cos[(n+1)\vartheta+\varphi]\cos[n\bar{\vartheta}+\varphi]$$
$$- \cos[n\vartheta+\varphi]\cos[(n+1)\bar{\vartheta}+\varphi]\}$$
$$= -P(\cos\vartheta)\left\{\sin[(2n+1)\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}+2\varphi]\sin\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2} + \sin(2n+1)\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}\sin\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}\right\}$$

schreiben kann, wobei φ *nur von* ϑ, nicht aber von $\bar{\vartheta}$ und n abhängt[31]). Da ferner die folgenden Funktionen von $\bar{\vartheta}$

$$F(\cos\bar{\vartheta})\sin\bar{\vartheta}\,\frac{c(\vartheta)-c(\bar{\vartheta})}{\cos\vartheta-\cos\bar{\vartheta}} \quad \text{und} \quad F(\cos\bar{\vartheta})\sin\bar{\vartheta}\,\frac{s(\vartheta)-s(\bar{\vartheta})}{\cos\vartheta-\cos\bar{\vartheta}}$$

(L) integrabel sind, folgt, daß

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} F(\cos\bar{\vartheta})\sin\bar{\vartheta}\,\frac{\Phi_n(\vartheta,\bar{\vartheta}) - \Psi_n(\vartheta,\bar{\vartheta})}{\cos\vartheta-\cos\bar{\vartheta}}\,d\bar{\vartheta} = 0$$

ist. Der zu beweisende Satz läßt sich mithin auch folgendermaßen formulieren:

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} F(\cos\bar{\vartheta})\sin\bar{\vartheta} \left[\frac{\Psi_n(\vartheta,\bar{\vartheta})}{\cos\vartheta-\cos\bar{\vartheta}} - P(\cos\vartheta)\frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}}{2\sin\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}} \right] d\bar{\vartheta} = 0.$$

Nun ist

$$\frac{\sin\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}}{\cos\vartheta-\cos\bar{\vartheta}} + \frac{1}{2\sin\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}} = 0,$$

man hat also

$$\frac{\Psi_n(\vartheta,\bar{\vartheta})}{\cos\vartheta-\cos\bar{\vartheta}} - P(\cos\vartheta)\frac{\sin(2n+1)\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}}{2\sin\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}}$$
$$= -P(\cos\vartheta)\sin\left[(2n+1)\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}+2\varphi\right]\frac{\sin\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}}{\cos\vartheta-\cos\bar{\vartheta}}.$$

[31]) Es ist nämlich $a\cos\bar{\vartheta} + b\sin\bar{\vartheta} = \sqrt{a^2+b^2}\cos(\bar{\vartheta}+\alpha)$, wobei α von $\bar{\vartheta}$ unabhängig ist.

die Funktion von $\bar{\vartheta}$

$$F(\cos\bar{\vartheta})\sin\bar{\vartheta}\sin\left[(2n+1)\frac{\vartheta+\bar{\vartheta}}{2}+2\varphi\right]\frac{\sin\frac{\vartheta-\bar{\vartheta}}{2}}{\cos\vartheta-\cos\bar{\vartheta}}$$

integrabel ist, folgt hieraus die Behauptung.

Damit ist Satz II und also auch unser in der Einleitung formuliertes eorem bewiesen.

Kapitel III.

twicklung einer willkürlichen Funktion nach Jacobischen (hypergeometrischen) Polynomen.

Das in der Einleitung ausgesprochene und in Kapitel II bewiesene eorem gestattet auch die Entwicklungen, die nach Jacobischen (hypermetrischen) Polynomen fortschreiten, mit der trigonometrischen Entklung zu vergleichen. Die Jacobischen Polynome $J_n(\alpha,\beta;x)$ gehören der Belegungsfunktion

$$p(x)=p(\alpha,\beta;x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta,$$

bei α und β größer als -1 sind, und lassen sich bekanntlich durch Orthogonalitätseigenschaft

$$1-x)^\alpha(1+x)^\beta J_m(\alpha,\beta;x)\,J_n(\alpha,\beta;x)\,dx=\begin{cases}0 \text{ für } m\gtrless n,\\ 1 \text{ für } m=n\end{cases}\quad(m,n=0,1,2,\ldots)$$

rakterisieren (vgl. Jacobi, Werke **6**, S. 184). Das im vorhergehenden viesene Theorem ist indessen nur für $-\frac{1}{2}\leqq\alpha,\beta\leqq\frac{1}{2}$ auf diese Polynome wendbar, da $p(x)=p(\alpha,\beta;x)$ nur in diesem Falle zu der Klasse (A) l. Einleitung) gehört. Der Zweck dieses letzten Kapitels ist das Entklungstheorem auch für Jacobische Polynome zu beweisen, deren Indes entweder der Bedingung: $\alpha,\beta\geqq-\frac{1}{2}$, oder der Bedingung: $\alpha,\beta\leqq-\frac{1}{2}$ nügen. Den Fall, wo von den Zahlen α,β die eine $>-\frac{1}{2}$ und die andere $-\frac{1}{2}$ ist, konnte ich leider nicht erledigen.

Bevor ich auf diese Erweiterungen übergehe, schicke ich einige, im sentlichen bekannte Hilfssätze über diese Polynome voraus.

§ 8.

Hilfssätze.

Der Zweck dieses Paragraphen ist den asymptotischen Wert von

$$K_n(p;x)=\sum_{\nu=0}^{n}[J_\nu(\alpha,\beta;x)]^2$$

für große n zu berechnen, wenn x eine innere Stelle des Intervalls $(-1, 1)$ bezeichnet.

Man hat zunächst nach der Christoffelschen Formel

$$(1') \quad K_n(p; x) = \frac{l_n(\alpha, \beta)}{l_{n+1}(\alpha, \beta)} [J'_{n+1}(\alpha, \beta; x) J_n(\alpha, \beta; x) - J'_n(\alpha, \beta; x) J_{n+1}(\alpha, \beta; x)],$$

wobei $l_n(\alpha, \beta)$ den Koeffizient von x^n in $J_n(\alpha, \beta; x)$ bezeichnet.

Es ist bekanntlich

$$(2) \quad p(\alpha, \beta; x) J_n(\alpha, \beta; x) = (-1)^n c_n(\alpha, \beta) \frac{d^n}{dx^n} (1-x)^{n+\alpha} (1+x)^{n+\beta};$$

die (offenbar positive) Konstante $c_n(\alpha, \beta)$ läßt sich aus der Bedingung

$$\int_{-1}^{1} p(\alpha, \beta; x) [J_n(\alpha, \beta; x)]^2 dx = 1$$

berechnen. Es ergibt sich

$$[c_n(\alpha, \beta)]^2 = \frac{2n+\alpha+\beta+1}{2^{2n+\alpha+\beta+1}} \frac{(n+\alpha+\beta)!}{n!\,(n+\alpha)!\,(n+\beta)!},$$

d. h. nach der Stirlingschen Formel

$$c_n(\alpha, \beta) = \frac{\left(\frac{e}{n}\right)^n}{2^{n+\frac{\alpha+\beta}{2}} \sqrt{2\pi}} \left[1 + O\left(\frac{1}{n}\right)\right]$$

und

$$\frac{c_n(\alpha, \beta)}{c_{n+1}(\alpha, \beta)} = 2n + O(1)^{32}).$$

Aus (2) folgt ferner

$$l_n(\alpha, \beta) = \frac{(2n+\alpha+\beta)!}{(n+\alpha+\beta)!} c_n(\alpha, \beta),$$

also ist

$$\frac{l_n(\alpha, \beta)}{l_{n+1}(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)^{33}).$$

---

[32]) $O(a_n)$ ist das übliche Zeichen für eine Größe, die mit a_n dividiert bei wachsendem n beschränkt bleibt. Der Kürze halber wird $\Gamma(z+1) = \Pi(z) = z!$ geschrieben.

[33]) Die etwas weniger besagende Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{l_n(\alpha, \beta)}{l_{n+1}(\alpha, \beta)} = \frac{1}{2},$$

sogar die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} \frac{l_n(\alpha, \beta)}{\frac{n}{2}} = c > 0$$

gilt viel allgemeiner. Es sei $p(x)$ eine samt $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \log p(x)\,(L)$ integrable Funktion und $l_n(p)$ sei der Koeffizient von x^n in $Q_n(x)$, wobei $Q_n(x)$ das zu $p(x)$ gehörige n-te orthogonale Polynom bezeichnet. Dann ist

$$\lim_{n=\infty} \frac{l_n(p)}{l_n(1)} = \lim_{n=\infty} \sqrt{\pi} \frac{l_n(p)}{2^n} = e^{-\frac{1}{2\pi} \int_{-1}^{1} (1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \log p(x)\, dx}$$

(Vgl. a. a. O.[1]) S. 207).

Nun liefert (2) durch Differention nach x

$$p'(\alpha,\beta;x)J_n(\alpha,\beta;x)+p(\alpha,\beta;x)J_n'(\alpha,\beta;x)$$
$$=(-1)^n c_n(\alpha,\beta)\frac{d^{n+1}}{dx^{n+1}}(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}$$
$$=-\frac{c_n(\alpha,\beta)}{c_{n+1}(\alpha-1,\beta-1)}p(\alpha-1,\beta-1;x)\,J_{n+1}(\alpha-1,\beta-1;x)$$

d hieraus ergibt sich unschwer

$$p(\alpha,\beta;x)\left[J'_{n+1}(\alpha,\beta;x)J_n(\alpha,\beta;x)-J'_n(\alpha,\beta;x)J_{n+1}(\alpha,\beta;x)\right]$$
$$-p(\alpha-1,\beta-1;x)\left[\frac{c_{n+1}(\alpha,\beta)}{c_{n+2}(\alpha-1,\beta-1)}J_{n+2}(\alpha-1,\beta-1;x)J_n(\alpha,\beta;x)\right.$$
$$\left.-\frac{c_n(\alpha,\beta)}{c_{n+1}(\alpha-1,\beta-1)}J_{n+1}(\alpha-1,\beta-1;x)J_{n+1}(\alpha,\beta;x)\right],$$

n.

$$K_n(p;x)=\frac{1}{1-x^2}\frac{l_n(\alpha,\beta)}{l_{n+1}(\alpha,\beta)}\left[\frac{c_n(\alpha,\beta)}{c_{n+1}(\alpha-1,\beta-1)}J_{n+1}(\alpha-1,\beta-1;x)J_{n+1}(\alpha,\beta;x)\right.$$
$$\left.-\frac{c_{n+1}(\alpha,\beta)}{c_{n+2}(\alpha-1,\beta-1)}J_{n+2}(\alpha-1,\beta-1;x)J_n(\alpha,\beta;x)\right].$$

Wir wollen jetzt eine von G. Darboux herrührende asymptotische rmel der Polynome $J_n(\alpha,\beta;x)$ heranziehen[34]). Es ist für $0<\vartheta<\pi$

$$J_n(\alpha,\beta;\cos\vartheta)$$
$$\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\vartheta}}\frac{1}{2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{\alpha}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{\beta}}\cos\left[\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\vartheta-\frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)\right]+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Man setze hier der Kürze halber

$$\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\vartheta}}\frac{1}{2^{\frac{\alpha+\beta}{2}}\left(\sin\frac{\vartheta}{2}\right)^{\alpha}\left(\cos\frac{\vartheta}{2}\right)^{\beta}}=\sqrt{\frac{2}{\pi\sin\vartheta}}\frac{1}{\sqrt{p(\alpha,\beta;\cos\vartheta)}}=g(\alpha,\beta;\vartheta)$$

d

$$\left(n+\frac{\alpha+\beta+1}{2}\right)\vartheta-\frac{\pi}{2}\left(\alpha+\frac{1}{2}\right)=\gamma_n(\alpha,\beta;\vartheta)=\gamma_n,$$

ın ist

$$J_n(\alpha,\beta;\cos\vartheta)=g(\alpha,\beta;\vartheta)\cos\gamma_n+O\left(\frac{1}{n}\right)\qquad(0<\vartheta<\pi).$$

raus folgt u. a., daß die Polynome $J_n(\alpha,\beta;x)$ an einer festen Stelle Innern des Intervalles $(-1,1)$ beschränkt bleiben. Aus den obigen rmeln ergibt sich ferner

$$\frac{l_n(\alpha,\beta)}{l_{n+1}(\alpha,\beta)}\frac{c_n(\alpha,\beta)}{c_{n+1}(\alpha-1,\beta-1)}=\frac{n}{2}+O(1)$$

[34]) Darboux, a. a. O. [7]), S. 23. Die von uns angegebene Formel folgt durch eine hte Umformung aus der Darbouxschen.

und

$$\frac{l_n(\alpha,\beta)}{l_{n+1}(\alpha,\beta)}\,\frac{c_{n+1}(\alpha,\beta)}{c_{n+2}(\alpha-1,\beta-1)}=\frac{n}{2}+O(1),$$

d. h.

$$(1''')\qquad K_n(p;x)=\frac{n}{2(1-x^2)}[J_{n+1}(\alpha-1,\beta-1;x)\,J_{n+1}(\alpha,\beta;x)$$
$$-J_{n+2}(\alpha-1,\beta-1;x)\,J_n(\alpha,\beta;x)]+O(1)$$
$$(-1<x<1).$$

Man hat nun für $0<\vartheta<\pi$

$$J_n(\alpha,\beta;\cos\vartheta)=g(\alpha,\beta;\vartheta)\cos\gamma_n,$$

ferner

$$J_{n+1}(\alpha,\beta;\cos\vartheta)=g(\alpha,\beta;\vartheta)\cos(\gamma_n+\vartheta)+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$J_{n+1}(\alpha-1,\beta-1;\cos\vartheta)=g(\alpha-1,\beta-1;\vartheta)\cos\left(\gamma_n+\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=-g(\alpha-1,\beta-1;\vartheta)\sin\gamma_n+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$J_{n+2}(\alpha-1,\beta-1;\cos\vartheta)=g(\alpha-1,\beta-1;\vartheta)\cos\left(\gamma_n+\vartheta+\frac{\pi}{2}\right)+O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=-g(\alpha-1,\beta-1;\vartheta)\sin(\gamma_n+\vartheta)+O\left(\frac{1}{n}\right).$$

Der Klammerausdruck in $(1''')$ läßt sich also nach der Substitution $x=\cos\vartheta$ auch folgendermaßen schreiben:

$$g(\alpha,\beta;\vartheta)\,g(\alpha-1,\beta-1;\vartheta)[-\sin\gamma_n\cos(\gamma_n+\vartheta)+\cos\gamma_n\sin(\gamma_n+\vartheta)]$$
$$+O\left(\frac{1}{n}\right)=g(\alpha,\beta;\vartheta)\,g(\alpha-1,\beta-1;\vartheta)\sin\vartheta+O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$=\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{\sqrt{p(\alpha,\beta;\cos\vartheta)\,p(\alpha-1,\beta-1;\cos\vartheta)}}+O\left(\frac{1}{n}\right)=\frac{2}{\pi}\,\frac{\sqrt{1-x^2}}{p(\alpha,\beta;x)}+O\left(\frac{1}{n}\right)$$
$$(x=\cos\vartheta),$$

d. h.

$$K_n(p;x)=\frac{1}{\pi}\,\frac{n}{p(\alpha,\beta;x)\sqrt{1-x^2}}+O(1)\qquad(-1<x<1).$$

§ 9.

Beweis.

Es sei $x=\cos\vartheta$, $\bar{x}=\cos\bar{\vartheta}$ und

$$\mathfrak{E}_n(\vartheta,\bar{\vartheta})=\sum_{\nu=0}^{n}J_\nu(\alpha,\beta;\cos\vartheta)\,J_\nu(\alpha,\beta;\cos\bar{\vartheta})$$
$$-\frac{1}{p(\alpha,\beta;\cos\vartheta)\sin\vartheta}\cdot\frac{2}{\pi}\sum_{\nu=0}^{n}{}'\cos\nu\vartheta\cos\nu\bar{\vartheta},$$

ann lautet der zu beweisende Satz folgendermaßen: Es ist für jede unktion $f(x)$, die im Intervalle $(-1, 1)$ samt $p(\alpha, \beta; x)[f(x)]^2(L)$ inte-rabel ist und für $-1 < \xi = \cos\vartheta_0 < 1 \quad (0 < \vartheta_0 < \pi)$

3) $$\lim_{n=\infty} \int_0^\pi p(\alpha, \beta; \cos\bar{\vartheta}) f(\cos\bar{\vartheta}) \mathfrak{E}_n(\vartheta_0, \bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta} = 0.$$

1. Es seien zunächst die Indizes α und β größer als $-\frac{1}{2}$. Dann äßt sich zu jeder ε die „Approximationsbelegung" $p_2(x)$ genau so wie m Hilfssatz I ermitteln. Wir können also ähnlich wie in § 3 schließen. Es habe $K_n(p; \xi)$ und $K_n(p_2; \xi)$ die dortige Bedeutung, d. h. die Quadrat-umme der $n+1$ ersten, zu $p(x)$ bzw. $p_2(x)$ gehörenden orthogonalen olynome für $x = \xi$. Dann ist nach § 3, (6) $[p(\alpha, \beta; x) = p(x)]$

4) $$\left|\int_0^\pi p(\cos\bar{\vartheta}) f(\cos\bar{\vartheta}) \mathfrak{E}_n(\vartheta_0, \bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta}\right|^2 \leqq H(p)[K_n(p; \xi) - K_n(p_2; \xi)].$$

Unsere Behauptung wird somit bewiesen, wenn wir die Gleichung

$$\lim_{n=\infty} [K_n(p; \xi) - K_n(p_2; \xi)] = 0$$

zeigen können.

Dies läßt sich in der Tat nachweisen, und zwar mittels einer von G. Darboux a. a. O.[7]) ausgeführten Methode. Doch gestalten sich die hierbei erforderlichen Rechnungen äußerst langwierig; wir wollen hier also dieser Schwierigkeit aus dem Wege gehen, indem wir zeigen, daß es für unsere Zwecke vollkommen genügt, das Bestehen einer Ungleichung

5) $$0 \leqq K_n(p; \xi) - K_n(p_2; \xi) < C$$

nachzuweisen; C bedeutet hier eine von n und $f(x)$ unabhängige positive Konstante.

In der Tat, nehmen wir (5) als bewiesen an. Dann folgt aus (4)

4') $$\left|\int_0^\pi p(\cos\bar{\vartheta}) f(\cos\bar{\vartheta}) \mathfrak{E}_n(\vartheta_0, \bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta}\right|^2 \leqq CH = C\int_{-1}^{1} p(x)[f(x)]^2\, dx.$$

Es sei nun $A(x)$ *irgendein* Polynom (etwa r-ten Grades). Man hat offenbar

$$\sum_{\nu=0}^{n} J_\nu(\alpha, \beta; x) \int_{-1}^{1} p(\bar{x}) A(\bar{x}) J_\nu(\alpha, \beta; \bar{x})\, d\bar{x} = A(x) \qquad (n \geqq r)$$

und mit Rücksicht auf elementare Konvergenzsätze aus der Theorie der Fourierschen Reihen

$$\lim_{n=\infty} \frac{2}{\pi} \sum_{\nu=0}^{n}{}' \cos\nu\vartheta \int_0^\pi p(\cos\bar{\vartheta}) A(\cos\bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta} \cos\nu\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta} = p(\cos\vartheta) A(\cos\vartheta) \sin\vartheta$$

$$(0 < \vartheta < \pi),$$

d. h.

$$\lim_{n=\infty} \int_0^{\pi} p(\cos\bar{\vartheta})\, A(\cos\bar{\vartheta})\, \mathfrak{E}_n(\vartheta_0, \bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta} = 0.$$

Aus (4′) ergibt sich somit, indem dort $f(x)$ durch $f(x) - A(x)$ ersetzt wird,

$$\left| \limsup_{n=\infty} \int_0^{\pi} p(\cos\bar{\vartheta}) f(\cos\bar{\vartheta})\, \mathfrak{E}_n(\vartheta_0, \bar{\vartheta}) \sin\bar{\vartheta}\, d\bar{\vartheta} \right|^2$$

$$\leqq C \int_{-1}^{1} p(x) [f(x) - A(x)]^2 dx,$$

wobei $A(x)$ ein *beliebiges* Polynom bezeichnet. Die rechte Seite läßt sich aber hier durch geeignete Wahl von $A(x)$ beliebig klein machen[35]), woraus tatsächlich (3) folgt.

Es bleibt uns also übrig, die Ungleichung (5) zu beweisen. In § 6 wurde die Formel

$$K_n(p_2; \xi) = \frac{n+1}{\pi \sqrt{1-\xi^2}\, p_2(\xi)} + O(1) = \frac{n+1}{\pi \sqrt{1-\xi^2}\, p(\xi)} + O(1)$$

abgeleitet, wobei $O(1)$ eine für alle n und ε beschränkte Größe bezeichnet. Mit Rücksicht auf die im vorigen Paragraphen abgeleitete Formel

$$K_n(p; \xi) = \frac{n}{\pi \sqrt{1-\xi^2}\, p(\xi)} + O(1)$$

folgt hieraus ohne Schwierigkeit die Behauptung.

Damit ist unser Entwicklungstheorem für alle Entwicklungen bewiesen, die nach Jacobischen Polynomen $J_n(\alpha, \beta; x)$ mit Indizes $\alpha, \beta \geqq -\frac{1}{2}$ fortschreiten.

2. Eine einfache Bemerkung ermöglicht aber, auf dieselbe Weise auch den Fall $-1 < \alpha, \beta \leqq -\frac{1}{2}$ zu erledigen. In der Tat läßt sich dann genau so wie in § 1 eine Belegungsfunktion $p_2(x)$ ermitteln, die von derselben Form ist, wie die im Hilfssatz I festgestellte (d. h.

$$p_2(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \frac{1}{P_2(x)},$$

wobei $P_2(x)$ ein für $-1 \leqq x \leqq 1$ positives Polynom bezeichnet) und wörtlich dieselben Eigenschaften besitzt wie die dort angegebenen, mit dem einzigen Unterschied, daß

$$p(x) \geqq p_2(x) \qquad (-1 \leqq x \leqq 1)$$

ist (und nicht $\leqq$, wie dort). Dementsprechend erleiden die Ausführungen von § 3 eine leichte Modifizierung. Es ist mit der dortigen Bezeichnungsweise

$$\mathsf{M}_n(p; \lambda, \mu) \leqq \mathsf{M}_n(p_2; \lambda, \mu)$$

[35]) Vgl. etwa Stekloff, a. a. O.[7]), S. 214 und Fußnote.

und

$$K_n(p;\xi)\lambda^2 + 2S_n(p;\xi)\lambda\mu + H_n(p)\mu^2$$
$$\leqq K_n(p_2;\xi)\lambda^2 + 2S_n(p_2;\xi)\lambda\mu + H_n(p_2)\mu^2,$$

d. h.

$$K_n(p;\xi) \leqq K_n(p_2;\xi),$$
$$H_n(p) \leqq H_n(p_2)$$

und

$$|S_n(p;\xi) - S_n(p_2;\xi)|^2 \leqq [H_n(p_2) - H_n(p)][K_n(p_2;\xi) - K_n(p;\xi)]$$
$$\leqq H_n(p_2)[K_n(p_2;\xi) - K_n(p;\xi)],$$

wobei $S_n(p;\xi)$ (wie in § 3) die n-te Partialsumme der Entwicklung von $\frac{F(x)}{p(x)}$ nach den zu $p(x)$ gehörigen orthogonalen Polynomen bezeichnet; $F(x)$ wird hierbei (wie dort) als (L) integrabel vorausgesetzt.

Es sei nun (wie in § 3)

$$F(x) = p(x)f(x),$$

dann ist

$$H_n(p_2) \leqq \lim_{n=\infty} H_n(p_2) = \int_{-1}^{1} \frac{[F(x)]^2}{p_2(x)}\,dx = \int_{-1}^{1} \frac{[p(x)]^2}{p_2(x)}[f(x)]^2\,dx,$$

vorausgesetzt, daß dieses Integral endlich ist. Den Ausdruck

$$K_n(p_2;\xi) - K_n(p;\xi)$$

können wir ähnlich wie vorher abschätzen. Unser Resultat bleibt also in Gültigkeit, vorausgesetzt, daß nicht nur das Integral

$$\int_{-1}^{1} p(x)[f(x)]^2\,dx,$$

sondern sogar

$$\int_{-1}^{1} \frac{[p(x)]^2}{p_2(x)}[f(x)]^2\,dx$$

oder, was dasselbe heißt,

$$\int_{-1}^{1} \sqrt{1-x^2}\,[p(x)f(x)]^2\,dx$$

endlich ist. (Offenbar folgt daraus, daß das Integral von $p(x)f(x)$ endlich ist.)

Indem wir zwei Reihen $\sum a_n$ und $\sum b_n$ als „*äquikonvergent*“ bezeichnen, wenn es eine von 0 verschiedene Zahl k gibt derart, daß

$$\lim_{n=\infty} \sum_{\nu=0}^{n} (a_\nu - k b_\nu) = \lim_{n=\infty} \left[\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu - k \sum_{\nu=0}^{n} b_\nu\right] = 0$$

ist, können wir unser Entwicklungstheorem über Jacobische Polynome folgendermaßen formulieren:

Es seien

$$J_n(\alpha, \beta; x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots)$$

die Jacobischen (hypergeometrischen) Polynome mit den Indizes α und β $(\alpha, \beta > -1)$, die durch die Orthogonalitätseigenschaft

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} J_m(\alpha, \beta; x) J_n(\alpha, \beta; x)\, dx = \begin{cases} 0 \text{ für } m \gtrless n, \\ 1 \text{ für } m = n \end{cases} \quad (m, n = 0, 1, 2,$$

zu charakterisieren sind. Es sei $f(x)$ eine Funktion, für welche das Lebesguesche Integral

$$\int_{-1}^{1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} f(x)\, dx$$

existiert. Dann ist die Entwicklung von $f(x)$ nach Jacobischen Polynomen

$$\sum_{n=0}^{\infty} J_n(\alpha, \beta; x) \int_{-1}^{1} (1-\bar{x})^{\alpha}(1+\bar{x})^{\beta} f(\bar{x}) J_n(\alpha, \beta; \bar{x})\, d\bar{x} \quad (x = \cos\vartheta)$$

„äquikonvergent" mit der Kosinusentwicklung von $(1-\cos\vartheta)^{\alpha}(1+\cos\vartheta)^{\beta} f(\cos\vartheta)|\sin\vartheta|$ für alle x im Innern des Intervalls $(-1, 1)$, vorausgesetzt, daß entweder

$$\alpha \text{ und } \beta \geqq -\frac{1}{2} \text{ und } (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}[f(x)]^2 (L) \text{ integrabel}$$

oder

$$\alpha \text{ und } \beta \leqq -\frac{1}{2} \text{ und } (1-x)^{2\alpha+\frac{1}{2}}(1+x)^{2\beta+\frac{1}{2}}[f(x)]^2 (L) \text{ integrabel}$$

ist.

Unter den zahlreichen Anwendungen dieses Satzes, die sich von selbst bieten, hebe ich die folgende hervor:

Die Entwicklung einer stetigen Funktion nach den Jacobischen Polynomen $J_n(\alpha, \beta; x)$ mit den Indizes $\alpha, \beta \geqq -\frac{1}{2}$ oder $-1 < \alpha, \beta \leqq -\frac{1}{2}$ (oder insbesondere die Entwicklung einer stetigen Funktion nach den speziellen Jacobischen Polynomen $J_n(\alpha, \alpha; x)$, wobei $\alpha > -1$ beliebig ist) ist im Innern des Intervalles $-1 \leqq x \leqq 1$ nicht notwendig konvergent; sie ist aber stets summierbar mit Hilfe der Cesàroschen Mitteln von der Ordnung ε, wobei ε eine beliebig kleine positive Zahl bezeichnet.

Berlin, März 1921.

(Eingegangen am 25. März 1921.)

Zur Arithmetik der Potenzreihen mit ganzzahligen Koeffizienten.

Von

I. Schur in Berlin.

Unter $\mathfrak{G}$ verstehe ich im folgenden die Gesamtheit der Potenzreihen

1) $$f = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots,$$

deren Koeffizienten ganze Zahlen eines gegebenen algebraischen Zahlkörpers $K = P(\vartheta)$ vom Grade n sind. Mit $\mathfrak{K}$ bezeichne ich die Menge derjenigen Potenzreihen von $\mathfrak{G}$, die konvergent sind, d. h. einen von 0 verschiedenen Konvergenzradius besitzen. Innerhalb $\mathfrak{K}$ betrachte ich noch die Teilmenge $\mathfrak{F}$ der Potenzreihen f, die rationale Funktionen darstellen; eine derartige Funktion läßt sich stets, wie man leicht schließt, auf die Form $\frac{P}{Q}$ bringen, wo P und Q Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten aus dem Körper K bedeuten.

Jede der drei Mengen $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{F}$ bildet, wenn man Summe, Differenz und Produkt von zwei Potenzreihen in der üblichen Weise erklärt, einen Integritätsbereich (Ordnung, Ring) $\mathfrak{J}$. Man kann nun nach den innerhalb $\mathfrak{J}$ geltenden Teilbarkeitsgesetzen fragen; insbesondere wird zu untersuchen sein, ob und in welchem Sinne hier von einer eindeutigen Zerlegung in irreduzible Faktoren gesprochen werden kann. Hierbei spielen, wie in jedem Integritätsbereich, eine besondere Rolle die *Einheiten*, d. h. diejenigen Reihen f von $\mathfrak{J}$, für die auch die Potenzreihenentwicklung von $\frac{1}{f}$ zu $\mathfrak{J}$ gehört. In unserem Fall ist f offenbar dann und nur dann eine Einheit, wenn $a_0 = f(0)$ eine Einheit des Körpers K ist. Zwei Reihen f und g, für die $\frac{f}{g}$ eine Einheit von $\mathfrak{J}$ ist, mögen wie üblich *assoziierte* Elemente von $\mathfrak{J}$ heißen. Sieht man nun zwei derartige Reihen als nicht voneinander verschieden an, so läßt sich in dem einfachsten

Falle $K = P$ (d. h. $n = 1$), wie schon Herr E. Cahen[1]) mit Hilfe eines Analogons zum Euklidschen Algorithmus gezeigt hat, in jedem der drei Integritätsbereiche $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{F}$ eine gegebene Reihe f auf eine und nur eine Weise in irreduzible Faktoren zerlegen. Im folgenden wird sich ergeben, daß dasselbe auch für Körper K höheren Grades gilt, sobald nur die Anzahl h der Idealklassen von K gleich 1 ist. Nimmt man aber $h > 1$ an, so besteht, wie schon das Beispiel $\vartheta = \sqrt{-5}$

$$2(2 + 2x + 3x^2) = [2 + (1 + \vartheta)x][2 + (1 - \vartheta)x]$$

zeigt, ein solcher Satz nicht mehr. In diesem Fall bedarf es der Entwicklung einer Idealtheorie innerhalb des zu untersuchenden Integritätsbereiches. Sie verläuft, wie sich im folgenden zeigen wird, in der Hauptsache analog der Dedekindschen Theorie der Körperideale, weist aber doch einige bemerkenswerte Abweichungen auf.

§ 1.

Die Reihenideale.

Es sei wieder $\mathfrak{J}$ einer der drei Integritätsbereiche $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{F}$. In jedem Falle enthält $\mathfrak{J}$ die Gesamtheit $\mathfrak{o}$ der ganzen Zahlen von K. Sind f und g zwei Potenzreihen von $\mathfrak{J}$ und ist f innerhalb $\mathfrak{G}$ durch g teilbar, d. h. $f = gh$, wo auch h eine Reihe der Form (1) mit ganzzahligen Koeffizienten aus K bedeutet, so ist h wieder in $\mathfrak{J}$ enthalten. Um anzudeuten, daß eine Reihe f oder ein Komplex $\mathfrak{Q}$ von Reihen in einem anderen Komplex $\mathfrak{R}$ enthalten ist, schreibe ich $f < \mathfrak{R}$, bzw. $\mathfrak{Q} < \mathfrak{R}$.

Definition. *Unter einem Reihenideal $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{J}$ verstehe ich eine Teilmenge von $\mathfrak{J}$, die den beiden Bedingungen genügt:*

1. *Aus $f < \mathfrak{A}$, $g < \mathfrak{A}$ folgt $f + g < \mathfrak{A}$.*
2. *Ist $f < \mathfrak{A}$ und $g < \mathfrak{J}$, so ist $fg < \mathfrak{A}$.*

Der Bereich $\mathfrak{J}$ stellt selbst ein Reihenideal dar, das die Rolle des Ideals 1 spielen wird. Multipliziert man alle Elemente eines Reihenideals $\mathfrak{A}$ mit einer Potenzreihe f von $\mathfrak{J}$, so entsteht ein neues Reihenideal $\mathfrak{B} = f\mathfrak{A}$, und sind umgekehrt alle Elemente g eines Reihenideals $\mathfrak{B}$ durch f teilbar, so bilden die Quotienten $\frac{g}{f}$ ein Reihenideal $\mathfrak{A}$. Zu jeder Reihe f von $\mathfrak{J}$ gehört das *Reihenhauptideal* $(f) = f\mathfrak{J}$.

Ist allgemein $\mathfrak{S}$ irgendein System von endlich oder unendlich vielen Potenzreihen aus $\mathfrak{J}$, so bilden die sämtlichen linearen Verbindungen

$$fu + gv + \ldots$$

[1]) Sur les séries intégro-entières, Comptes Rendus de l'Académie des Sciences, 152 (1911), S. 124–127.

on endlich vielen Elementen $f, g, \ldots$ aus $\mathfrak{S}$ mit Koeffizienten $u, v, \ldots$ us $\mathfrak{J}$ ein Reihenideal $\mathfrak{A} = (\mathfrak{S})$, das ich das *durch* $\mathfrak{S}$ *erzeugte Reihenideal* nenne. Damit sind zugleich die Zeichen (f, g), (f, g, h), ... erklärt.

Reduziert sich insbesondere $\mathfrak{S}$ auf die Gesamtheit der Zahlen eines deals $\mathfrak{m}$ des Körpers K, so schreibe ich $(\mathfrak{S}) = \mathfrak{m}\mathfrak{J}$. Dieses Reihenideal mfaßt die sämtlichen Potenzreihen f von $\mathfrak{J}$, deren Koeffizienten durch teilbare ganze Zahlen des Körpers sind.

Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Reihenideale (von $\mathfrak{J}$), und durchläuft f alle lemente von $\mathfrak{A}$, g alle Elemente von $\mathfrak{B}$, so bedeutet $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ das durch as System aller Produkte fg erzeugte Reihenideal. Wir sagen dann uch, $\mathfrak{C}$ sei durch $\mathfrak{A}$ und durch $\mathfrak{B}$ teilbar, $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ seien Teiler von $\mathfrak{C}$. s ist jedenfalls

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} < \mathfrak{A}, \quad \mathfrak{A}\mathfrak{B} < \mathfrak{B}.$$

Man darf aber nicht, wie in der Dedekindschen Idealtheorie schließen, aß jedes in einem Reihenideal $\mathfrak{A}$ enthaltene Reihenideal $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{A}$ teilar sei. Das gilt z. B. schon nicht für die Reihenideale

$$\mathfrak{A} = (2 + x,\ 2 - x), \quad \mathfrak{C} = (2x) < \mathfrak{A}.$$

Für die Multiplikation der Reihenideale gilt offenbar das Kommuations- und auch das Assoziationsprinzip.

Ist $\mathfrak{A}$ ein Reihenideal von $\mathfrak{J}$ und sind die konstanten Glieder $\alpha = f(0)$ er Elemente f von $\mathfrak{A}$ nicht sämtlich Null[2]), so liefern sie in ihrer Gemtheit ein Ideal $\mathfrak{a}$ des Körpers K, das ich das *Leitideal* von $\mathfrak{A}$ nenne. st insbesondere $\mathfrak{A} = (f)$ ein Reihenhauptideal, für das $\alpha_0 = f(0)$ nicht erschwindet, so ist das Leitideal von $\mathfrak{A}$ gleich dem Hauptideal (α_0) des örpers. Für jedes Körperideal $\mathfrak{m}$ ist ferner das Leitideal von $\mathfrak{m}\mathfrak{J}$ leich $\mathfrak{m}$. Das Leitideal eines Produktes $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist offenbar nichts anderes ls das Produkt der Leitideale von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$.

Für jedes nicht durch x teilbare Reihenideal $\mathfrak{A}$ betrachte ich für $= 0, 1, 2, \ldots$ die Gesamtheit $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ der durch x^ν teilbaren Reihen $= \Sigma \alpha_\lambda x^\lambda$ von $\mathfrak{A}$, für die also $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{\nu-1} = 0$ ist. Auch $\mathfrak{A}^{(\nu)}$ t ein Reihenideal. Ich setze noch $\mathfrak{A}^{(\nu)} = x^\nu \mathfrak{A}_\nu$ und nenne

2) $$\mathfrak{A}_0 = \mathfrak{A},\ \mathfrak{A}_1,\ \mathfrak{A}_2, \ldots$$

ie *Folge der dem Reihenideal* $\mathfrak{A}$ *zugeordneten Reihenideale.* Ihre Leitleale

3) $$\mathfrak{a}_0 = \mathfrak{a},\ \mathfrak{a}_1,\ \mathfrak{a}_2, \ldots$$

efern die *Folge der dem Reihenideal* $\mathfrak{A}$ *zugeordneten Körperideale.* Da $\mathfrak{A}^{(\nu)} < \mathfrak{A}^{(\nu+1)}$ ist, so wird

$$\mathfrak{A}_0 < \mathfrak{A}_1 < \mathfrak{A}_2 < \ldots,$$

[2]) Dafür sage ich auch, $\mathfrak{A}$ sei nicht durch x teilbar.

also auch

$$\mathfrak{a}_0 < \mathfrak{a}_1 < \mathfrak{a}_2 < \dots .$$

In der Folge (3) ist also jedes Ideal durch alle folgenden teilbar. Da nun ein Körperideal $\mathfrak{a}$ nur endlich viele Idealteiler besitzt, so müssen die Ideale (3) von einer gewissen Stelle an übereinstimmen. Die kleinste Zahl k, für die

$$\mathfrak{a}_k = \mathfrak{a}_{k+1} = \mathfrak{a}_{k+2} = \dots$$

wird, nenne ich den *Index* des Reihenideals $\mathfrak{A}$. Ferner heiße das Reihenideal

$$\mathfrak{A}_k = \mathfrak{A}^*$$

der *Kern* von $\mathfrak{A}$. Offenbar ist dann der Index von $\mathfrak{A}_\nu$ für $\nu < k$ gleich $k - \nu$ und für $\nu \geqq k$ gleich 0. Der Kern von $\mathfrak{A}_\nu$ ist für jedes ν gleich $\mathfrak{A}^*$[3]).

Ist z. B. $\mathfrak{A} = (2 + x, 2^m x)$, so wird

$$\mathfrak{A}_1 = (2 + x, 2^m), \quad \mathfrak{A}_2 = (2 + x, 2^{m-1}), \dots, \mathfrak{A}_m = (2 + x, 2),$$
$$\mathfrak{A}_{m+1} = \dots = \mathfrak{J}.$$

Der Index von $\mathfrak{A}$ ist also $m + 1$ und der Kern von $\mathfrak{A}$ gleich $\mathfrak{J}$[4]).

§ 2.

Die regulären Reihenideale.

Ein Reihenideal $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{J}$, das nicht durch x teilbar ist, nenne ich *regulär*, wenn sein Index k gleich 0 ist, wenn also in der Folge (3) der zugeordneten Körperideale $\mathfrak{a}_\nu$ alle Glieder mit dem Leitideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{A}$ übereinstimmen. Insbesondere ist der Kern jedes beliebigen Reihenideals ein reguläres Reihenideal. Ferner ist, wie man ohne weiteres erkennt, jedes Reihenhauptideal (f) regulär, sofern nur das konstante Glied von f nicht verschwindet.

I. *Das Reihenideal $\mathfrak{A}$ ist dann und nur dann regulär, wenn jedes der zugeordneten Reihenideale $\mathfrak{A}_\nu$ mit $\mathfrak{A}$ übereinstimmt.*

Daß diese Bedingung hinreichend ist, liegt auf der Hand. Wir haben nur zu zeigen, daß aus

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{a}_1 = \mathfrak{a}_2 = \dots$$

für jedes ν auch $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}$ folgt. Hierfür werde ich zwei Beweismethoden angeben; für $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$ sind beide Methoden zulässig, für $\mathfrak{J} = \mathfrak{K}$ gilt im allgemeinen nur die erste, für $\mathfrak{J} = \mathfrak{F}$ nur die zweite.

---

[3]) Ist $\mathfrak{A}$ durch x teilbar und $\mathfrak{A} = x^m \mathfrak{B}$, wobei die Elemente des Reihenideals $\mathfrak{B}$ nicht mehr alle für $x = 0$ verschwinden, so setze ich $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{B}^*$.

[4]) Dieses Beispiel zeigt zugleich, daß der Index eines Reihenideals jeden Wert annehmen kann.

1. Man stelle, was bekanntlich stets möglich ist, das Leitideal $\mathfrak{a}$ von
in der Form $\mathfrak{a} = (\alpha, \beta)$ dar, wo α und β von 0 verschiedene ganze
ahlen des Körpers K sein sollen. Nach Voraussetzung enthält dann $\mathfrak{A}$
vei Reihen

$$f = \alpha + \alpha_1 x + \ldots, \qquad g = \beta + \beta_1 x + \ldots$$

ei nun

$$h = \gamma + \bar{\gamma} x + \ldots$$

ne Reihe von $\mathfrak{A}_\nu$. Wegen $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{a}$ ist dann γ in $\mathfrak{a}$ enthalten. Daher
ssen sich zwei ganze Zahlen ϱ und σ von K so bestimmen, daß

$$\gamma = \alpha\varrho + \beta\sigma$$

ird. Setzt man dann

$$h - \varrho f - \sigma g = x h_1, \qquad h_1 = \gamma_1 + \bar{\gamma}_1 x + \ldots,$$

wird $h_1 < \mathfrak{A}_{\nu+1}$, und da auch $\mathfrak{a}_{\nu+1} = \mathfrak{a}$ sein soll, so ist γ_1 wieder in $\mathfrak{a}$
thalten, wir können daher zwei ganze Zahlen ϱ_1 und σ_1 aus K so
ählen, daß

$$\gamma_1 = \alpha\varrho_1 + \beta\sigma_1$$

ird. Man setze dann

$$h_1 = \varrho_1 f - \sigma_1 g = x h_2, \qquad h_2 = \gamma_2 + \bar{\gamma}_2 x + \ldots$$

sw. Indem wir dieses Verfahren fortsetzen, erhalten wir zwei Reihen

$$u = \varrho + \varrho_1 x + \ldots, \qquad v = \sigma + \sigma_1 x + \ldots$$

ıs $\mathfrak{G}$, für die

$$h = fu + gv$$

ird. Im Falle $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$ ergibt sich also, daß jedes Element h von $\mathfrak{A}_\nu$ in
enthalten ist, und da andererseits $\mathfrak{A} < \mathfrak{A}_\nu$ ist, so wird $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}$. Diese
berlegung führt aber auch für $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ zum Ziel. Dann bilden die
ınzen Zahlen

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$$

on K ein vollständiges Restsystem in bezug auf den Idealmodul (β),
können die Zahlen $\varrho, \varrho_1, \ldots$ Schritt für Schritt auch dem endlichen
ystem (6) entnommen werden, wobei die zugehörigen $\sigma, \sigma_1, \ldots$ sich von
lbst eindeutig bestimmen. Die Reihe u hat dann nur endlich viele
oneinander verschiedene Koeffizienten und besitzt daher gewiß einen
on 0 verschiedenen Konvergenzradius. Da im Falle $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ auch f, g
nd h konvergente Potenzreihen sein sollen, so folgt aus (5), daß auch v
icht divergent sein kann. Dies zeigt wieder, daß $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}$ sein muß.

2. Im Falle $\mathfrak{J} = \mathfrak{F}$ brauchen die Reihen u und v nicht notwendig
s rationale Funktionen bestimmbar zu sein. Um auch in diesem Fall
e Richtigkeit unseres Satzes darzutun, schließen wir folgendermaßen:

Für das Leitideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{A}$ mögen die Zahlen $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ eine Basis bilden. Es gibt dann in $\mathfrak{A}$ n Reihen der Form

$$f_\varkappa = \zeta_\varkappa + \bar{\zeta}_\varkappa x + \ldots .$$

Ist nun wieder (4) ein Element von $\mathfrak{A}_\nu$, so ist $\gamma < \mathfrak{a}$ und daher in der Form

$$\gamma = c_{10}\zeta_1 + c_{20}\zeta_2 + \ldots + c_{n0}\zeta_n$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten $c_{\varkappa 0}$ darstellbar. Setzt man

$$h - \sum_\varkappa c_{\varkappa 0} f_\varkappa = x h_1, \qquad h_1 = \gamma_1 + \gamma_1 x + \ldots,$$

so lassen sich wieder n ganze rationale Zahlen $c_{1\varkappa}$ so bestimmen, daß

$$\gamma_1 = c_{11}\zeta_1 + c_{21}\zeta_2 + \ldots + c_{n1}\zeta_n$$

wird, und dann setze man

$$h_1 - \sum_\varkappa c_{\varkappa 1} f_\varkappa = x h_2, \qquad h_2 = \gamma_2 + \bar{\gamma}_2 x + \ldots$$

usw. Auf diese Weise erhält man n wohlbestimmte Folgen $c_{\varkappa 0}, c_{\varkappa 1}, \ldots$ ganzer rationaler Zahlen, und setzt man

$$U_\varkappa = c_{\varkappa 0} + c_{\varkappa 1} x + \ldots,$$

so wird

$$h = f_1 U_1 + f_2 U_2 + \ldots + f_n U_n. \tag{7}$$

Stellen nun die Potenzreihen

$$h, f_1, f_2, \ldots, f_n \tag{8}$$

rationale Funktionen dar, so gilt dasselbe auch für die Reihen $U_\varkappa$. Denn drückt man in den Reihen (8) alle Koeffizienten durch die den Körper K erzeugende Zahl ϑ aus und ersetzt ϑ durch die konjugiert algebraischen Zahlen, so entstehen neue Reihen

$$h^{(\mu)}, f_1^{(\mu)}, f_2^{(\mu)}, \ldots, f_n^{(\mu)}, \tag{9}$$

die wieder rationale Funktionen darstellen (vgl. Einleitung). Da nun die Koeffizienten der Reihen $U_\varkappa$ rational sind, so folgt aus (7)

$$h^{(\mu)} = f_1^{(\mu)} U_1 + f_2^{(\mu)} U_2 + \ldots + f_n^{(\mu)} U_n \qquad (\mu = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Diese n linearen Gleichungen, deren Determinante $|f_\varkappa^{(\mu)}|$ für $x = 0$ in die von Null verschiedene Determinante $|\zeta_\varkappa^{(\mu)}|$ übergeht, bestimmen die $U_\varkappa$ als rationale Funktionen von x. Aus (7) folgt also nicht nur für $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$, sondern auch für $\mathfrak{J} = \mathfrak{F}$, daß jedes Element h von $\mathfrak{A}_\nu$ in $\mathfrak{A}$ enthalten ist, was wieder $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}$ liefert.

Diese Betrachtung lehrt zugleich (für $\nu = 0$), daß für die beiden Integritätsbereiche $\mathfrak{G}$ und $\mathfrak{F}$ jedes reguläre Reihenideal $\mathfrak{A}$ eine Basis

$f_2, \ldots, f_n$ in dem Sinne besitzt, daß jedes Element h von $\mathfrak{A}$ auf eine
d nur eine Weise in der Form (7) darstellbar ist, wobei die $U_\varkappa$ Potenz-
ihen mit ganzen rationalen Koeffizienten bedeuten. Für $\mathfrak{J} = \mathfrak{K}$ versagt
er unsere Überlegung im allgemeinen. Denn die Reihen (9) brauchen,
nn die Reihen (8) von Null verschiedene Konvergenzradien besitzen,
cht für jedes μ dieselbe Eigenschaft zu haben[5]).

§ 3.

Weitere Eigenschaften der regulären Reihenideale.

Ist insbesondere das Leitideal $\mathfrak{a}$ des regulären Reihenideals $\mathfrak{A}$ ein
auptideal $\mathfrak{a} = (\alpha)$ und ist f eine Potenzreihe von $\mathfrak{A}$, die mit dem kon-
anten Glied α beginnt, so erkennt man ähnlich wie auf S. 99, daß jedes
lement h von $\mathfrak{A}$ die Form fu hat, wo u in $\mathfrak{G}$ und genauer auch für
$= \mathfrak{K}$ oder $\mathfrak{J} = \mathfrak{F}$ in $\mathfrak{J}$ enthalten ist. Das liefert den Satz

II. *Ein reguläres Reihenideal ist dann und nur dann ein Reihen-
auptideal, wenn sein Leitideal ein Hauptideal ist.*

Ich beweise ferner:

III. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei Reihenideale und ist $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ ein reguläres
eihenideal, so sind auch $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ regulär.*

Unter Benutzung der in § 1 eingeführten Bezeichnungen erhalten wir
ämlich für jedes ν offenbar $\mathfrak{A}^{(\nu)}\mathfrak{B} < \mathfrak{C}^{(\nu)}$, also auch $\mathfrak{A}_\nu\mathfrak{B} < \mathfrak{C}_\nu$. Ist daher
$= \alpha_\nu + \alpha_{\nu+1}x + \ldots$ eine gegebene Reihe von $\mathfrak{A}_\nu$ und $g = \beta + \beta_1 x + \ldots$
ne beliebige Reihe von $\mathfrak{B}$, so ist $f_\nu g$ in $\mathfrak{C}_\nu$, also, da $\mathfrak{C}$ regulär sein soll,
ıch in $\mathfrak{C} = \mathfrak{C}_\nu$ enthalten. Daher ist das konstante Glied $\alpha_\nu\beta$ von $f_\nu g$
ırch das Leitglied $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$ von $\mathfrak{C}$ teilbar. Da dies für jedes $\beta < \mathfrak{b}$ der Fall
t, so muß auch $\alpha_\nu\mathfrak{b}$ durch $\mathfrak{a}\mathfrak{b}$, folglich α_ν durch $\mathfrak{a}$ teilbar sein. Daher
t $\mathfrak{a}_\nu$ durch $\mathfrak{a}$ und, weil umgekehrt $\mathfrak{a}$ durch $\mathfrak{a}_\nu$ teilbar ist, gleich $\mathfrak{a}$. Also
t $\mathfrak{A}$ regulär. Ebenso schließt man, daß $\mathfrak{B}$ regulär ist.

IV. *Zu jedem regulären Reihenideal $\mathfrak{A}$ läßt sich ein reguläres Reihen-
eal $\mathfrak{M}$ angeben, so daß $\mathfrak{A}\mathfrak{M}$ ein Reihenhauptideal wird.*

Ist nämlich $\mathfrak{a}$ das Leitideal von $\mathfrak{A}$, so bestimme man, was jedenfalls
öglich ist, eine durch $\mathfrak{a}$ teilbare ganze Zahl α des Körpers derart, daß

[5]) Ist $n > 2$ oder $n = 2$ und K ein reeller quadratischer Zahlkörper, so gibt es
ets konvergente Potenzreihen f von $\mathfrak{G}$, für welche die konjugierten Reihen $f^{(\mu)}$ nicht
mtlich von Null verschiedene Konvergenzradien besitzen. Denn bestimmt man dann,
as nach einem bekannten Satz von Minkowski stets möglich ist, eine ganze Zahl
$\neq 0$ von K, deren absoluter Betrag kleiner als 1 ist, so muß es unter den kon-
gierten Zahlen $\alpha', \alpha'', \ldots, \alpha^{(n-1)}$ mindestens eine geben, die absolut größer als 1
. Ist $\beta = \alpha^{(\mu)}$ eine solche Zahl, so wird $f = \Sigma\alpha^{\nu^2}x^\nu$ eine beständig konvergente
eihe, während $f^{(\mu)} = \Sigma\beta^{\nu^2}x^\nu$ den Konvergenzradius 0 besitzt.

$\frac{(\alpha)}{\mathfrak{a}} = \mathfrak{m}$ ein zu $\mathfrak{a}$ teilerfremdes Ideal wird. Setzt man dann $\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathfrak{J}$, so wird das Leitideal von

$$\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{M} = \mathfrak{m}\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{A}$$

das Hauptideal $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = (\alpha)$. In den früheren Bezeichnungen wird nun für jedes ν, da jedenfalls $\mathfrak{B} < \mathfrak{A}$ ist, auch $\mathfrak{B}_\nu < \mathfrak{A}_\nu$. Daher ist auch $\mathfrak{b}_\nu < \mathfrak{a}_\nu$, d. h. $\mathfrak{b}_\nu$ ist durch $\mathfrak{a}_\nu = \mathfrak{a}$ teilbar. Andererseits sind aber gewiß die Koeffizienten jeder Potenzreihe von $\mathfrak{B}$ durch $\mathfrak{m}$ teilbar. Hieraus folgt aber, daß $\mathfrak{b}_\nu$ ein durch $\mathfrak{m}$ teilbares Ideal sein muß. Da nun $\mathfrak{a}$ und $\mathfrak{m}$ teilerfremd sein sollen, so ist $\mathfrak{b}_\nu$ auch durch $\mathfrak{a}\mathfrak{m} = \mathfrak{b}$ teilbar. Daher ist $\mathfrak{b}_\nu = \mathfrak{b}$, d. h. $\mathfrak{B}$ ist ein reguläres Reihenideal. Aus II folgt nun wegen $\mathfrak{b} = (\alpha)$, daß $\mathfrak{B}$ ein Reihenhauptideal ist.

V. *Sind $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ zwei reguläre Reihenideale, so ist auch $\mathfrak{C} = \mathfrak{A}\mathfrak{B}$ regulär.*

Denn wählt man die (regulären) Reihenideale $\mathfrak{M}$ und $\mathfrak{N}$ so, daß

$$\mathfrak{A}\mathfrak{M} = (f), \qquad \mathfrak{B}\mathfrak{N} = (g)$$

Reihenhauptideale werden, so wird

$$\mathfrak{A}\mathfrak{M} \cdot \mathfrak{B}\mathfrak{N} = \mathfrak{A}\mathfrak{B} \cdot \mathfrak{M}\mathfrak{N} = (fg)$$

als (durch x nicht teilbares) Reihenhauptideal regulär, daher ist nach Satz III auch $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ regulär.

Aus IV folgt ferner in genau derselben Weise wie in der gewöhnlichen Idealtheorie

VI. *Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}$ drei Reihenideale und ist hierbei $\mathfrak{A}$ regulär, so folgt aus $\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}\mathfrak{C}$, daß $\mathfrak{B} = \mathfrak{C}$ sein muß. Ferner kann nur dann $\mathfrak{A}\mathfrak{B} < \mathfrak{A}\mathfrak{C}$ sein, wenn $\mathfrak{B} < \mathfrak{C}$ ist.*

§ 4.

Über die Teilbarkeit der Reihenideale.

Wir nannten schon in § 1 ein Reihenideal $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{A}$ teilbar, wenn $\mathfrak{C}$ von der Form $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ ist, und haben an einem Beispiel gezeigt, daß aus $\mathfrak{C} < \mathfrak{A}$ noch nicht die Teilbarkeit von $\mathfrak{C}$ durch $\mathfrak{A}$ folgt. Aus den Sätzen IV und VI schließt man aber ganz ebenso wie in der Theorie der Körperideale:

VII. *Jedes beliebige Reihenideal $\mathfrak{C}$, das in einem regulären Reihenideal $\mathfrak{A}$ enthalten ist, ist durch $\mathfrak{A}$ teilbar.*

Es sei nun $\mathfrak{A}$ ein beliebiges Reihenideal vom Index k. Der Kern $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{A}_k$ von $\mathfrak{A}$ ist dann ein reguläres Reihenideal, das $\mathfrak{A}$ enthält. Daher ist $\mathfrak{A}$ durch $\mathfrak{A}^*$ teilbar. Ich setze

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^* \overline{\mathfrak{A}}$$

d nenne $\overline{\mathfrak{A}}$ das aus $\mathfrak{A}$ *durch Reduktion hervorgehende* oder auch das zu gehörende *reduzierte* Reihenideal.

VIII. *Jedes reguläre Reihenideal* $\mathfrak{D}$, *das* $\mathfrak{A}$ *enthält, ist ein Teiler s Kerns* $\mathfrak{A}^*$ *von* $\mathfrak{A}$. *Der Kern von* $\mathfrak{A}$ *ist also das kleinste gemeinsame ielfache aller regulären Reihenideale, die* $\mathfrak{A}$ *enthalten.*

Der Beweis ergibt sich unmittelbar auf Grund des Satzes VII. Ist mlich k wieder der Index von $\mathfrak{A}$, so folgt aus $\mathfrak{A} < \mathfrak{D}$ auch $\mathfrak{A}_k < \mathfrak{D}_k$. a aber $\mathfrak{D}$ regulär sein soll, so liefert dies $\mathfrak{A}^* < \mathfrak{D}$, also ist $\mathfrak{A}^*$ durch teilbar.

IX. *Für jedes* ν *gilt zwischen den den Reihenidealen* $\mathfrak{A}$ *und* $\overline{\mathfrak{A}}$ *zuordneten Reihenidealen* $\mathfrak{A}_\nu$ *und* $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$ *die Relation*

$$\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}^* \overline{\mathfrak{A}}_\nu. \tag{10}$$

er Kern von $\overline{\mathfrak{A}}$ *ist gleich* $\mathfrak{J}$ *und der Index von* $\overline{\mathfrak{A}}$ *ist gleich dem Index von* $\mathfrak{A}$.

Da nämlich jedenfalls $\mathfrak{A}_\nu < \mathfrak{A}_k$ ist, so muß $\mathfrak{A}_\nu$ durch $\mathfrak{A}^*$ teilbar sein; sei etwa $\mathfrak{A}_\nu = \mathfrak{A}^* \mathfrak{Q}_\nu$. Aus $x^\nu \overline{\mathfrak{A}}_\nu < \overline{\mathfrak{A}}$ folgt nun

$$x^\nu \mathfrak{A}^* \overline{\mathfrak{A}}_\nu < \mathfrak{A}^* \overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{A},$$

so auch

$$x^\nu \mathfrak{A}^* \overline{\mathfrak{A}}_\nu < \mathfrak{A}^{(\nu)} = x^\nu \mathfrak{A}^* \mathfrak{Q}_\nu.$$

as liefert $\overline{\mathfrak{A}}_\nu < \mathfrak{Q}_\nu$. Andererseits ergibt sich aus $x^\nu \mathfrak{A}_\nu < \mathfrak{A}$, daß

$$x^\nu \mathfrak{A}^* \mathfrak{Q}_\nu < \mathfrak{A}^* \overline{\mathfrak{A}}, \quad \text{also} \quad x^\nu \mathfrak{Q}_\nu < \overline{\mathfrak{A}}$$

in muß. Folglich ist auch $x^\nu \mathfrak{Q}_\nu < (\overline{\mathfrak{A}})^{(\nu)} = x^\nu \overline{\mathfrak{A}}_\nu$, d. h. $\mathfrak{Q}_\nu < \overline{\mathfrak{A}}_\nu$. Dies efert aber $\mathfrak{Q}_\nu = \overline{\mathfrak{A}}_\nu$. — Aus der nun bewiesenen Gleichung (10) folgt rner, da $\mathfrak{A}_k$ das erste unter den Reihenidealen $\mathfrak{A}_\nu$ ist, das mit dem Kern * von $\mathfrak{A}$ zusammenfällt, durch Fortheben von $\mathfrak{A}^*$, daß unter den zu $\overline{\mathfrak{A}}$ geordneten Reihenidealen $\overline{\mathfrak{A}}_\nu$ die vor $\overline{\mathfrak{A}}_k$ stehenden von $\mathfrak{J}$ verschiedenen, e folgenden aber gleich $\mathfrak{J}$ sind. Es ist also in der Tat der Kern von gleich $\mathfrak{J}$ und sein Index gleich k.

Für das reduzierte Reihenideal $\overline{\mathfrak{A}}$ hat der Index k eine besonders einche Bedeutung: $\overline{\mathfrak{A}}$ enthält Potenzen von x, unter denen x^k den kleinsten xponenten aufweist.

X. *Sind* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *zwei beliebige Reihenideale, so ist*

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^* = \mathfrak{A}^* \mathfrak{B}^*, \qquad \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}} = \overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}}.$$

enn aus $\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^* \overline{\mathfrak{A}}$, $\mathfrak{B} = \mathfrak{B}^* \overline{\mathfrak{B}}$ folgt

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = \mathfrak{A}^* \mathfrak{B}^* \overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}} = (\mathfrak{A}\mathfrak{B})^* \overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}. \tag{11}$$

Also ist $\mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*$ ein reguläres Reihenideal, das $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ enthält, demnach (nach Satz VIII) ein Teiler des Kerns von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$. Ist nun

$$(\mathfrak{A}\mathfrak{B})^* = \mathfrak{A}^*\mathfrak{B}^*\mathfrak{D},$$

so liefert (11)

$$\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}} = \mathfrak{D}\,\overline{\mathfrak{A}\mathfrak{B}}. \tag{12}$$

Sind aber k und l die Indizes von $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$, so folgt aus $x^k < \overline{\mathfrak{A}}$, $x^l < \overline{\mathfrak{B}}$

$$x^{k+l} < \overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}}. \tag{13}$$

Daher ist der Kern von $\overline{\mathfrak{A}}\,\overline{\mathfrak{B}}$ gleich $\mathfrak{J}$. Aus (12) ergibt sich mithin (wieder nach Satz VIII), daß auch $\mathfrak{D} = \mathfrak{J}$ sein muß.

Die Formel (13) läßt erkennen, daß der Index m von $\mathfrak{A}\mathfrak{B}$ höchstens gleich $k+l$ sein kann. Es braucht aber durchaus nicht stets $m = k+l$ zu sein. Z. B. sind die Reihenideale

$$\mathfrak{A} = (2 + x, 2x), \qquad \mathfrak{B} = (2, x^2)$$

beide vom Index 2. Der Index m von

$$\mathfrak{A}\mathfrak{B} = (4 + 2x, 4x, 2x^2 + x^3, 2x^3)$$

ist aber nicht gleich $2+2$, sondern gleich 3.

Ich erwähne auch noch folgendes: Hat man für ein Reihenideal $\mathfrak{A}$ eine Zerlegung $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}\mathfrak{S}$ gefunden, wo $\mathfrak{R}$ regulär ist und $\mathfrak{S}$ eine Potenz von x enthält, so muß $\mathfrak{R} = \mathfrak{A}^*$, $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{A}}$ sein. Denn es wird dann $\mathfrak{R}^* = \mathfrak{R}$, $\mathfrak{S}^* = \mathfrak{J}$, also $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{R}^*\mathfrak{S}^* = \mathfrak{R}$, was in Verbindung mit $\mathfrak{A} = \mathfrak{R}\overline{\mathfrak{A}} = \mathfrak{R}\mathfrak{S}$ auch $\mathfrak{S} = \overline{\mathfrak{A}}$ liefert.

§ 5.

Der größte gemeinsame Teiler zweier oder mehrerer Reihenideale.

Sind $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ mehrere Reihenideale unseres Integritätsbereiches $\mathfrak{J}$ und bedeutet

$$\mathfrak{E} = (\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots)$$

das durch die Gesamtheit der Elemente von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ erzeugte Reihenideal, so braucht $\mathfrak{E}$ keineswegs stets, wie das in der Dedekindschen Idealtheorie der Fall ist, ein gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ zu sein. Dagegen besitzt, wie aus Satz VIII folgt, der Kern $\mathfrak{D} = \mathfrak{E}^*$ als ein reguläres Reihenideal, das jedes der Reihenideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ enthält, diese Eigenschaft. Zugleich ist jedes *reguläre* Reihenideal $\mathfrak{T}$, das ein gemeinsamer Teiler von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ ist, auch ein Teiler von $\mathfrak{D}$. Denn aus $\mathfrak{A} < \mathfrak{T}$, $\mathfrak{B} < \mathfrak{T}, \ldots$ folgt auch $\mathfrak{E} < \mathfrak{T}$.

Das Reihenideal $\mathfrak{D}$ bezeichne ich daher als den *größten gemeinsamen Teiler* von $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ und nenne diese Reihenideale *teilerfremd*, wenn

$= \mathfrak{J}$ ist. Teilerfremde Reihenideale sind also solche, die keinen *gulären* Teiler gemeinsam haben. Wir können auch sagen: $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \ldots$ nd teilerfremd, wenn sich eine Potenz x^m angeben läßt, die in der Form

$$x^m = f + g + \ldots$$

rstellbar ist, wobei $f < \mathfrak{A}$, $g < \mathfrak{B}, \ldots$ sein soll. Es gilt dann der Satz

XI. *Ist ein Produkt $\mathfrak{B}\mathfrak{C}$ von zwei beliebigen Reihenidealen durch s reguläre Reihenideal $\mathfrak{A}$ teilbar, und ist $\mathfrak{B}$ zu $\mathfrak{A}$ teilerfremd, so muß durch $\mathfrak{A}$ teilbar sein.*

Denn nach Voraussetzung gibt es eine Potenz von x^m von x, die der Form

$$x^m = f + g, \qquad f < \mathfrak{A}, \qquad g < \mathfrak{B}$$

rstellbar ist. Für jedes Element h von $\mathfrak{C}$ ist daher

$$x^m h = fh + gh < \mathfrak{A}.$$

olglich ist auch

$$x^m h < \mathfrak{A}^{(m)} = x^m \mathfrak{A}_m = x^m \mathfrak{A},$$

h. $h < \mathfrak{A}$. Das Reihenideal $\mathfrak{C}$ ist also ganz in $\mathfrak{A}$ enthalten und daher nach Satz VII) durch $\mathfrak{A}$ teilbar.

Aus XI folgt in bekannter Weise

XI*. *Ist ein Reihenideal $\mathfrak{A}$ zu jedem der Reihenideale $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2, \ldots, \mathfrak{B}_r$ ilerfremd, so ist $\mathfrak{A}$ auch zu dem Produkt $\mathfrak{B}_1 \mathfrak{B}_2 \ldots \mathfrak{B}_r$ teilerfremd.*

Hierbei brauchen die Reihenideale $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}_1, \ldots, \mathfrak{B}_r$ nicht regulär zu sein.

§ 6.

Die Zerlegung der regulären Reihenideale in Primfaktoren.

Ein *reguläres, von $\mathfrak{J}$ verschiedenes* Reihenideal $\mathfrak{P}$ nenne ich *unrlegbar* oder auch ein *Reihenprimideal*, wenn $\mathfrak{P}$ nur durch $\mathfrak{J}$ und sich lbst teilbar ist.

Ist nun $\mathfrak{A}$ ein beliebiges, von $\mathfrak{J}$ verschiedenes reguläres Reihenideal nd hat die Folge der Reihenideale

$$\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots \tag{14}$$

e Eigenschaft, daß jedes durch das folgende teilbar und von ihm verhieden ist, so gilt dasselbe auch für die Leitideale

$$\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \ldots \tag{15}$$

er Reihenideale (14). Um das zu erkennen, hat man nur zu beachten, aß $\mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots$ nach Satz III von selbst regulär sein müssen und daß z. B. us $\mathfrak{b} = \mathfrak{c}$ folgen würde, daß der Quotient $\frac{\mathfrak{B}}{\mathfrak{C}}$ ein (reguläres) Reihenideal

mit dem Leitideal $\mathfrak{o} = (1)$, also gegen unsere Voraussetzung gleich $\mathfrak{J}$ wäre. Da nun ein Körperideal $\mathfrak{a}$ nur endlich viele Idealteiler besitzt, muß die Folge (15) und demnach auch die Folge (14) abbrechen. Hieraus ergibt sich, daß $\mathfrak{A}$ durch mindestens ein Reihenprimideal teilbar sein muß, und auf Grund des Satzes XI* schließt man genau ebenso wie in der Theorie der Körperideale:

XII. *Jedes reguläre, von $\mathfrak{J}$ verschiedene Reihenideal $\mathfrak{A}$ ist, wenn von der Reihenfolge der Faktoren abgesehen wird, auf eine einzige Weise als Produkt*

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{P}_1 \mathfrak{P}_2 \dots \mathfrak{P}_r$$

von Reihenprimidealen darstellbar.

Um eine Anwendung von diesem Weg zu machen, will ich zeigen: Ist β eine (von Null verschiedene) ganze Zahl des Körpers K und

$$f = \alpha_0 + \alpha_1 x + \dots \qquad (\alpha_0 \neq 0)$$

eine Reihe von $\mathfrak{G}$, so weist die Entwicklung von $\frac{\beta}{f}$ nach Potenzen von x nur dann lauter ganzzahlige Koeffizienten auf, wenn β und alle Koeffizienten α_ν von f durch α_0 teilbar sind.[6]) Denn es ist dann das Reihenhauptideal $\beta\mathfrak{J}$ durch $(f) = f\mathfrak{J}$ teilbar. Ist aber

$$(\beta) = \mathfrak{p}_1 \mathfrak{p}_2 \dots \mathfrak{p}_r$$

die Zerlegnng des Körperideals (β) in Primideale, so lautet die Zerlegung von $\beta\mathfrak{J}$ in Reihenprimideale einfach

$$\beta\mathfrak{J} = \mathfrak{p}_1\mathfrak{J} \cdot \mathfrak{p}_2\mathfrak{J} \dots \mathfrak{p}_r\mathfrak{J}.$$

Daher muß auch jeder Primfaktor von (f) die Gestalt $\mathfrak{p}_s\mathfrak{J}$ haben, (f) ist demnach von der Form $\mathfrak{a}\mathfrak{J}$. Das Körperideal $\mathfrak{a}$ ist aber hierbei nichts anderes als das Leitideal (α_0) von (f). Folglich ist $f = \alpha_0 f_1$, wo f_1 eine Potenzreihe mit ganzzahligen Koeffizienten bedeutet.

Hieraus schließt man leicht: Stellt eine Potenzreihe h von $\mathfrak{G}$ eine rationale Funktion dar und bringt man sie auf die Form $\frac{g}{f}$, wo f und g teilerfremde Polynome mit ganzzahligen Koeffizienten aus dem Körper K sind, so müssen alle Koeffizienten von f und g durch das konstante Glied von f teilbar sein. Dies folgt einfach daraus, daß auch die Resultante β von f und g als eine lineare Verbindung von f und g innerhalb $\mathfrak{G}$ durch f teilbar sein muß.

---

[6]) Einen einfachen direkten Beweis für diesen Satz hat mir Herr A. Ostrowski mitgeteilt.

§ 7.

Der Klassenbegriff.

Bezeichnet man zwei Reihenideale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ von $\mathfrak{J}$ als *äquivalent* ($\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$), wenn sich zwei Potenzreihen f und g von $\mathfrak{J}$ angeben lassen, r die

$$f\mathfrak{A} = g\mathfrak{B} \tag{16}$$

rd, so gelten für diesen Äquivalenzbegriff dieselben Regeln wie in der wöhnlichen Idealtheorie, und man erhält eine Einteilung aller Reihen- eale von $\mathfrak{J}$ in *Reihenidealklassen* $A, B, \ldots$

Sind insbesondere die beiden äquivalenten Reihenideale $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ cht durch x teilbar, so kann man offenbar in (16) die Reihen f und g ch so wählen, daß ihre konstanten Glieder von Null verschieden aus- llen. Ist noch $\mathfrak{A}$ regulär, so muß $\mathfrak{B}$ als Teiler des regulären Reihen- eals $f\mathfrak{A}$ ebenfalls regulär sein. Wenn also eine Klasse A ein reguläres eihenideal enthält, so besteht sie aus lauter regulären Reihenidealen. ne solche Klasse nenne ich kurz regulär.

XIII. *Zwei reguläre Reihenideale* $\mathfrak{A}$ *und* $\mathfrak{B}$ *sind dann und nur nn äquivalent, wenn ihre Leitideale* $\mathfrak{a}$ *und* $\mathfrak{b}$ *äquivalente Körperideale nd. Die Anzahl der regulären Reihenidealklassen von* $\mathfrak{J}$ *ist endlich, nd zwar gleich der Anzahl* h *der Idealklassen des Körpers* K.

Denn besteht zwischen den beiden regulären Reihenidealen $\mathfrak{A}$ und $\mathfrak{B}$ e Gleichung (16) und ist

$$f = \varrho + \varrho_1 x + \ldots, \qquad g = \sigma + \sigma_1 x + \ldots \qquad (\varrho\sigma \neq 0),$$

wird $\varrho\mathfrak{a} = \sigma\mathfrak{b}$, also $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$. Ist umgekehrt $\mathfrak{a} \sim \mathfrak{b}$ und $\varrho\mathfrak{a} = \sigma\mathfrak{b}$, so sind

$$\varrho\mathfrak{A} = \mathfrak{C}, \qquad \sigma\mathfrak{B} = \mathfrak{D}$$

ei reguläre Reihenideale mit demselben Leitideal $\mathfrak{c}$. Ist nun aber $\mathfrak{m}$ n Körperideal, für das $\mathfrak{m}\mathfrak{c}$ ein Hauptideal wird, so sind $\mathfrak{m}\mathfrak{C} = \mathfrak{m}\mathfrak{J}\mathfrak{C}$ nd $\mathfrak{m}\mathfrak{D} = \mathfrak{m}\mathfrak{J}\mathfrak{D}$ reguläre Reihenideale mit einem Hauptideal als Leit- eal. Nach Satz II sind daher

$$\mathfrak{m}\mathfrak{C} = \varrho\mathfrak{m}\mathfrak{A} = (g), \qquad \mathfrak{m}\mathfrak{D} = \sigma\mathfrak{m}\mathfrak{B} = (f)$$

eihenhauptideale. Daher wird

$$\varrho f\mathfrak{m}\mathfrak{A} = \sigma g\mathfrak{m}\mathfrak{B},$$

so $\varrho f\mathfrak{A} = \sigma g\mathfrak{B}$, d. h. $\mathfrak{A} \sim \mathfrak{B}$. Hieraus folgt zugleich, daß die Anzahl h' r regulären Klassen von $\mathfrak{J}$ höchstens gleich h sein kann. Daß h' genau eich h ist, ergibt sich, indem man beachtet, daß zu jedem Körperideal reguläre Reihenideale $\mathfrak{A}$ mit dem Leitideal $\mathfrak{a}$ gehören, z. B. $\mathfrak{A} = \mathfrak{a}\mathfrak{J}$.

Ist insbesondere $h = 1$, so wird jedes reguläre Reihenideal ein Reihenhauptideal, und man schließt in bekannter Weise:

XIV. *Liegt der Betrachtung ein Körper K zugrunde, in dem die Anzahl der Idealklassen gleich 1 ist, und sieht man zwei assoziierte Potenzreihen von $\mathfrak{J}$ als nicht voneinander verschieden an, so läßt sich jede Reihe f von $\mathfrak{J}$ innerhalb dieses Integritätsbereiches auf eine und nur eine Weise in der Form*

$$f = f_1 f_2 \cdots f_r$$

darstellen, wobei $f_1, f_2, \ldots f_r$ unzerlegbare Potenzreihen sind.

Zu beachten ist noch, daß die Anzahl der nicht regulären Reihenidealklassen von $\mathfrak{J}$ durchaus nicht endlich ist. Sind nämlich

$$\mathfrak{A} = \mathfrak{A}^* \overline{\mathfrak{A}}, \qquad \mathfrak{B} = \mathfrak{B}^* \overline{\mathfrak{B}}$$

zwei äquivalente (nicht durch x teilbare) Reihenideale, und ist etwa $f\mathfrak{A} = g\mathfrak{B}$, wobei die konstanten Glieder von f und g von Null verschieden sein sollen, so folgt aus der am Schluß des § 4 gemachten Bemerkung

$$f\mathfrak{A}^* = g\mathfrak{B}^*, \qquad \overline{\mathfrak{A}} = \overline{\mathfrak{B}}.$$

Hieraus folgt aber, daß wenn z. B. $\mathfrak{S}_\nu$ die Folge der Reihenideale

$$\mathfrak{S}_1 = (2, x), \qquad \mathfrak{S}_2 = (2, x^2), \qquad \mathfrak{S}_3 = (2, x^3), \ldots$$

durchläuft und $\mathfrak{R}_\nu$ ($\nu = 1, 2, \ldots$) irgendwelche reguläre Reihenideale bedeuten, unter den Reihenidealen $\mathfrak{R}_\nu \mathfrak{S}_\nu$ nicht zwei einander äquivalent sind.

§ 8.

Über das Leitideal eines Reihenprimideals.

Die Entscheidung der Frage, ob ein vorgelegtes reguläres Reihenideal $\mathfrak{A}$ zerlegbar ist oder nicht, ist im allgemeinen schwierig. Einige einfache Kriterien lassen sich aber doch angeben.

Zunächst ist $\mathfrak{A}$ gewiß unzerlegbar, wenn das Leitideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{A}$ ein Primideal $\mathfrak{p}$ von K ist. Dasselbe gilt auch, wie man leicht sieht, wenn $\mathfrak{a}$ eine Potenz des Primideals $\mathfrak{p}$ ist und in den Elementen $f = \sum \alpha_\nu x^\nu$ von $\mathfrak{A}$ nicht alle α_1 durch $\mathfrak{p}$ teilbar sind.

Das gilt für jeden der von uns betrachteten drei Integritätsbereiche $\mathfrak{G}$, $\mathfrak{K}$ und $\mathfrak{J}$.

Von Interesse ist nun hier folgender Satz:

XV. *Legt man der Betrachtung einen beliebigen Körper K und einen der beiden Integritätsbereiche $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$ oder $\mathfrak{J} = \mathfrak{K}$ zugrunde, so ist jedes reguläre Reihenideal $\mathfrak{A}$, dessen Leitideal $\mathfrak{a}$ nicht Potenz eines Primideals ist, stets zerlegbar. Genauer: Ist $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$, wo $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ teiler-*

emde Körperideale sind, so läßt sich $\mathfrak{A}$ *in zwei Faktoren* $\mathfrak{B}$ *und* $\mathfrak{C}$ *mit en Leitidealen* $\mathfrak{b}$ *und* $\mathfrak{c}$ *zerlegen*[7]).

Es sei nämlich

$$\mathfrak{b} = \Pi \mathfrak{p}_\mu^{r_\mu}, \qquad \mathfrak{c} = \Pi \mathfrak{q}_\nu^{s_\nu}$$

e Zerlegung von $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$ in Primidealfaktoren. Man bestimme $\varkappa$ und λ s ganze Zahlen von K derart, daß $\varkappa$ durch $\mathfrak{b}$, aber durch keine der otenzen $\mathfrak{p}_\mu^{r_\mu+1}$ und ebenso λ durch $\mathfrak{c}$, aber durch keine der Potenzen $\mathfrak{q}_\nu^{s_\nu+1}$ eilbar wird. Ferner seien

$$\varrho = (\Pi \mathfrak{p}_\mu^{t_\mu})\mathfrak{m}, \qquad \sigma = (\Pi \mathfrak{q}_\nu^{u_\nu})\mathfrak{n} \qquad (t_\mu \geqq r_\mu,\ u_\nu \geqq s_\nu)$$

wei beliebige durch $\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c}$ teilbare ganze Zahlen des Körpers. Hierbei oll das (durch $\mathfrak{c}$ teilbare) Ideal $\mathfrak{m}$ zu $\mathfrak{b}$ und das (durch $\mathfrak{b}$ teilbare) Ideal $\mathfrak{n}$ u $\mathfrak{c}$ teilerfremd sein. Wähle ich nun β so, daß

$$\beta \equiv \varkappa \,(\mathrm{mod.}\ \mathfrak{b}^2), \qquad \beta \equiv 1 \,(\mathrm{mod.}\ \mathfrak{m})$$

ird, so wird $\mathfrak{b} = (\varrho, \beta)$, und hierbei ist β, weil $\mathfrak{c}$ ein Teiler von $\mathfrak{m}$ ist, u $\mathfrak{c}$ teilerfremd. Ich kann daher γ so bestimmen, daß

$$\gamma \equiv \lambda \,(\mathrm{mod.}\ \mathfrak{c}^2), \qquad \gamma \equiv 1 \,(\mathrm{mod.}\ \beta\mathfrak{n})$$

ird. Es ist dann $\mathfrak{c} = (\sigma, \gamma)$, wobei β und γ keinen Idealteiler gemein- am haben.

Da nun ϱ, σ und $\beta\gamma$ in dem Leitideal $\mathfrak{a}$ von $\mathfrak{A}$ enthalten sind, önnen wir jedenfalls in $\mathfrak{A}$ drei Potenzreihen der Form

$$f = \varrho + \varrho_1 x + \ldots, \qquad g = \sigma + \sigma_1 x + \ldots, \qquad h = \beta\gamma + \delta_1 x + \ldots$$

ngeben. Da nun β und γ (als Hauptideale) teilerfremd sind, lassen sich tets zwei Reihen

$$u = \beta + \beta_1 x + \ldots, \qquad v = \gamma + \gamma_1 x + \ldots$$

nit ganzen Koeffizienten aus K so wählen, daß $uv = h$ wird. Denn die ierzu erforderlichen Gleichungen

$$\beta\gamma_1 + \gamma\beta_1 = \delta_1, \qquad \beta\gamma_2 + \gamma\beta_2 = \delta_2 - \beta_1\gamma_1, \ldots$$

assen sich Schritt für Schritt befriedigen. Geschieht dies so, daß $\beta_1, \beta_2, \ldots$ inem festen Restsystem mod. β entnommen werden, so fällt u konvergent us, und dann wird, wenn h eine konvergente Potenzreihe ist, auch v einen on Null verschiedenen Konvergenzradius besitzen.

Die beiden Reihenideale

$$\mathfrak{B} = (f, u), \qquad \mathfrak{C} = (g, v)$$

---

[7]) Für den Körper $K = P$ findet sich dieser Satz bereits bei Herrn Cahen, l. c. [1]).

haben dann die Leitideale $\mathfrak{b}$ und $\mathfrak{c}$. In

$$\mathfrak{B}\mathfrak{C} = (fg, fv, ug, uv)$$

sind ferner die vier erzeugenden Reihen in $\mathfrak{A}$ enthalten, und der größte gemeinsame Idealteiler ihrer konstanten Glieder ist gleich dem Leitideal

$$\mathfrak{a} = \mathfrak{b}\mathfrak{c} = (\varrho\sigma, \varrho\gamma, \beta\sigma, \beta\gamma)$$

von $\mathfrak{A}$. Hieraus schließt man aber unter Berücksichtigung der Tatsache, daß $\mathfrak{A}$ regulär sein soll, wie auf S. 99, daß $\mathfrak{B}\mathfrak{C} = \mathfrak{A}$ wird, und zwar gilt das nicht nur für $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$, sondern auch für $\mathfrak{J} = \mathfrak{K}$.

Für den Fall $K = P$ besagt unser Satz XV nur, daß eine Potenzreihe

$$h = bc + d_1 x + \ldots \qquad (b > 0,\ c > 0)$$

mit ganzen rationalen Koeffizienten, bei der b und c teilerfremde Zahlen sind, in der Form

$$h = (b + b_1 x + \ldots)(c + c_1 x + \ldots)$$

zerlegbar ist, wo auch b_ν und c_ν ganze rationale Zahlen bedeuten. Diese Zerlegung ist eindeutig festgelegt, wenn noch verlangt wird, daß alle b_ν dem System $0, 1, \ldots, b-1$ entnommen werden sollen. Zum Beispiel ist

$$6 + x = (2 + x + x^2 + x^5 + x^6 + x^{11} + \ldots)$$
$$(3 - x - x^2 + x^3 - 2x^5 + 2x^7 - x^8 + 2x^{10} + \ldots).$$

§ 9.

Über teilerfremde Potenzreihen.

Zwei oder mehrere Potenzreihen $f, g, \ldots$ aus dem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ nennen wir *teilerfremd*, wenn es die zugehörigen Reihenhauptideale $(f), (g), \ldots$ sind (vgl. § 5). Notwendig und hinreichend ist hierfür, daß es eine Potenz x^k von x geben soll, die eine Darstellung der Form

(17)
$$x^k = fu + gv + \ldots$$

zuläßt, wo auch $u, v, \ldots$ Potenzreihen von $\mathfrak{J}$ sind. Der kleinste Exponent k dieser Art ist nichts anderes als der Index des (reduzierten) Reihenideals

$$\mathfrak{A} = (f, g, \ldots)$$

ist[8]).

Sind nun $f, g, \ldots$ Polynome aus $\mathfrak{G}$ (d. h. solche mit ganzzahligen Koeffizienten aus dem Körper K), die im Sinne der gewöhnlichen Algebra

[8]) In dieser Bedeutung findet sich der Begriff des Index (für den Körper $K = P$) als „rang de jonction de $f, g, \ldots$“ schon bei Herrn Cahen, l. c. [1]). — Zu beachten ist noch, daß, wenn $f, g, \ldots$ rationale Funktionen darstellen, der Wert des Index unabhängig davon ist, ob man $\mathfrak{A}$ als Reihenideal von $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$ oder von $\mathfrak{J} = \mathfrak{F}$ auffaßt.

eilerfremd sind, so lassen sich bekanntlich auch von Null verschiedene anze Zahlen α von K angeben, die in der Form

18) $$\alpha = fP + gQ + \ldots$$

arstellbar sind, wobei auch $P, Q, \ldots$ Polynome aus $\mathfrak{G}$ sind. Ich will un zeigen, daß das Analoge auch für Potenzreihen gilt.

XVI. *Sind $f, g, \ldots$ Potenzreihen aus unserem Integritätsbereich $\mathfrak{J}$, eren konstante Glieder nicht sämtlich verschwinden und die in dem hier ingeführten Sinne teilerfremd sind, so enthält das durch sie erzeugte eihenideal $\mathfrak{A}$ auch von Null verschiedene Konstanten.*

Für diesen Satz gebe ich zwei Beweise an, von denen jeder eine be- nerkenswerte Eigenschaft des Index k von $\mathfrak{A}$ liefert.

1. Für $k = 0$ und $k = 1$ ist unser Satz evident, da im ersten Fall die Zahl 1 und im zweiten Fall das konstante Glied jeder Potenzreihe $< \mathfrak{A}$ enthält. Ist aber $k > 1$, so sei ε eine primitive k-te Einheits- urzel. Für jedes Element

$$q(x) = \gamma_0 + \gamma_1 x + \ldots \qquad (\gamma_0 \neq 0)$$

on $\mathfrak{A}$ bilde ich dann das Produkt

$$q_1(x) = q(\varepsilon x)\, q(\varepsilon^2 x) \ldots q(\varepsilon^{k-1} x).$$

Diese Funktion von x liefert offenbar, nach Potenzen von x entwickelt, ine Reihe, die zugleich mit $q(x)$ zum Integritätsbereich $\mathfrak{J}$ gehört[9]). Daher ist

$$q(x)\, q_1(x) = \gamma_0^k + \delta_1 x^k + \delta_2 x^{2k} + \ldots$$

n $\mathfrak{A}$ enthalten. Da aber x^k ein Element von $\mathfrak{A}$ sein soll, so kommt auch

$$\gamma_0^k = q(x)\, q_1(x) - x^k(\delta_1 + \delta_2 x^k + \ldots)$$

n $\mathfrak{A}$ vor.

2. Man bezeichne die Abschnitte der Potenzreihen $f, g, \ldots$ mit $, g_\nu \ldots$ und setze

$$f = f_\nu + x^{\nu+1} \bar{f}_\nu, \qquad g = g_\nu + x^{\nu+1} \bar{g}_\nu, \ldots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots).$$

Aus $x^k < \mathfrak{A}$ folgt, daß für $\nu \geqq k - 1$ auch die Polynome $f_\nu, g_\nu, \ldots$ in $\mathfrak{A}$ nthalten sind. Genügen nun die Potenzreihen $u, v, \ldots$ von $\mathfrak{J}$ der Glei- hung (17), so wird insbesondere für $\nu \geqq k$

19) $$f_\nu u + g_\nu v + \ldots = x^k - x^{\nu+1}(\bar{f}_\nu u + \bar{g}_\nu v + \ldots) = x^k r_\nu(x),$$

o $r_\nu(x)$ eine Potenzreihe von $\mathfrak{J}$ mit dem konstanten Glied 1, also eine Einheit von $\mathfrak{J}$ ist. Als Polynome aufgefaßt mögen nun $f_\nu, g_\nu, \ldots$ das

[9]) Dies gilt nicht nur für $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$, sondern auch für $\mathfrak{J} = \mathfrak{R}$ und $\mathfrak{J} = \mathfrak{F}$.

Polynom t_ν als größten gemeinsamen Teiler (im gewöhnlichen Sinne) besitzen. Da es hierbei bei t_ν auf einen konstanten Faktor nicht ankommt, denke ich mir t_ν als ein Polynom mit ganzzahligen Koeffizienten aus dem Körper K irgendwie festgelegt. Bei passender Wahl der ganzen von Null verschiedenen Zahlen $\alpha, \beta, \ldots$ aus K wird dann

$$\alpha f_\nu = t_\nu F_\nu, \qquad \beta g_\nu = t_\nu G_\nu, \ldots,$$

wo $F_\nu, G_\nu, \ldots$ wieder Polynome mit ganzen algebraischen Koeffizienten werden. Die Gleichung (19) lehrt dann, daß für $\lambda = \alpha\beta \ldots$ das Produkt $\lambda x^k r_\nu(x)$ und folglich auch λ innerhalb unseres Bereiches $\mathfrak{G}$ durch t_ν teilbar wird. Hieraus folgt aber (vgl. § 6), daß t_ν *die Form*

$$t_\nu = \tau_\nu (1 + \mu_1 x + \mu_2 x^2 + \ldots) \tag{20}$$

haben muß, wo $\tau_\nu, \mu_1, \mu_2, \ldots$ *ganze Zahlen aus* K *sind.* Die Polynome $F_\nu, G_\nu, \ldots$ sind aber im gewöhnlichen Sinne teilerfremd, es gibt daher von Null verschiedene ganze Zahlen ϱ_ν aus K, die sich in der Form

$$\varrho_\nu = F_\nu P + G_\nu Q + \ldots$$

darstellen lassen, wobei $P, Q, \ldots$ Polynome aus dem Bereiche $\mathfrak{G}$ bedeuten. Dann wird aber

$$\varrho_\nu t_\nu = f_\nu P + g_\nu Q + \ldots$$

ein Element von $\mathfrak{A}$. Aus (20) folgt nun, daß auch die Konstante $\varrho_\nu \tau_\nu$ in $\mathfrak{A}$ vorkommen muß.

Zum Schluß will ich noch auf folgende Anwendung aufmerksam machen: Sind $f, g, \ldots$ Polynome mit ganzen Koeffizienten aus dem Körper K, die im gewöhnlichen Sinne teilerfremd sind, so sind sie als Potenzreihen von $\mathfrak{G}$ aufgefaßt auch in unserem Sinne teilerfremd, sofern nur der größte gemeinsame Idealteiler $\mathfrak{d}$ ihrer sämtlichen Koeffizienten gleich dem Ideal $\mathfrak{o} = (1)$ ist. Denn bestimmt man eine ganze Zahl $\alpha \neq 0$ von K, die in der Form (18) darstellbar ist, so ist α in dem Reihenideal $\mathfrak{A} = (f, g, \ldots)$ und folglich auch in dem Kern $\mathfrak{A}^*$ von $\mathfrak{A}$ enthalten. Daher ist $\mathfrak{A}^*$ ein Teiler von $\alpha\mathfrak{J}$ und folglich von der Form $\mathfrak{a}\mathfrak{J}$ (vgl. § 6). Das Körperideal $\mathfrak{a}$ muß hierbei ein Teiler des Ideals $\mathfrak{d} = \mathfrak{o}$ und also ebenfalls gleich $\mathfrak{o}$ sein. Es ist also in der Tat $\mathfrak{A}^* = \mathfrak{J}$. Sind nun

$$p = 1 + \varrho_1 x + \varrho_2 x^2 + \ldots, \quad q = 1 + \sigma_1 x + \sigma_2 x^2 + \ldots, \quad \ldots$$

beliebige Potenzreihen mit ganzen Koeffizienten aus K, und ersetzt man die Polynome $f, g, \ldots$ durch die Potenzreihen

$$M = fp, \qquad N = gq, \ldots,$$

so erzeugen diese Reihen wieder das Reihenideal $\mathfrak{A}$ von $\mathfrak{J} = \mathfrak{G}$. Ist daher k der Index von $\mathfrak{A}$, so ergibt die beim zweiten Beweis des Satzes XVI

urchgeführte Betrachtung, daß die Polynome $M_\nu, N_\nu, \ldots$, die als Abhnitte der Potenzreihen $M, N, \ldots$ auftreten, folgende Eigenschaft haben: t T_ν ihr größter gemeinsamer Teiler im gewöhnlichen Sinne, so ist T_ν r $\nu \geqq k$ entweder eine Konstante oder von der Form

$$T_\nu = \text{konst.}\,(1 + \mu_1 x + \ldots),$$

o $\mu_1, \mu_2, \ldots$ *ganze* algebraische Zahlen sind [10]).

[10]) Zusatz bei der Korrektur. Während der Drucklegung dieser Arbeit die interessante Untersuchung von Frl. E. Noether, Idealtheorie in Ringbereichen, ath. Ann. 83 (1921), S. 24—66, erschienen. Einzelne meiner Resultate lassen sich der allgemeinen Theorie von Frl. Noether in Beziehung bringen, eine wesentliche ereinfachung der Beweisführung dürfte sich aber hierbei wohl kaum ergeben. (26. 8. 21.)

(Eingegangen am 19. April 1921.)

Die Einzigartigkeit der Pythagoreischen Maßbestimmung.

Von

Hermann Weyl in Zürich.

Credo spatioso Numen in orbe.
— Kepler.

§ 1.

Das Problem.

Seit den Untersuchungen von Helmholtz und Lie über die Grundlagen der Geometrie haben unsere Ansichten über die Natur des Raumes oder allgemeiner des extensiven Mediums der Außenwelt durch die Relativitätstheorie eine tiefgreifende Wandlung erfahren. Wir haben es jetzt nicht mehr mit einem drei-, sondern mit einem vierdimensionalen Kontinuum zu tun, dessen Metrik nicht auf einer positiv-definiten, sondern auf einer indefiniten quadratischen Form beruht; außerdem glauben wir nicht mehr an die metrische Homogenität dieses Mediums, welche geradezu die Grundlage der Helmholtzschen Axiomatik war, weil das metrische Feld nicht etwas Festgegebenes ist, sondern in kausaler Abhängigkeit von der Materie steht. So muß also auch das Problem, die metrische Natur des Raumes aus möglichst einfachen und prinzipiellen Gründen zu begreifen, neu formuliert werden. Beim Aufbau der Infinitesimalgeometrie im Geiste der Relativitätstheorie hatten sich mir die entscheidenden Eigentümlichkeiten der Pythagoreischen Maßbestimmung immer deutlicher herausgeschält, so daß ich in der 4. Auflage von „Raum Zeit Materie" das Kapitel über das metrische Kontinuum mit einer solchen Neuformulierung des Raumproblems beschließen konnte, die ich für völlig zwingend halte[1]). Hier soll — für eine beliebige Dimensionszahl n — der mathematische Nachweis erbracht werden, daß die Pythagoreische Maßbestimmung die einzige ist, welche den dort aufgestellten Forderungen genügt.

Das Wesen der Metrik erblicke ich, wie sich das fast von selbst versteht, im Begriffe der *Kongruenz*, der jedoch rein infinitesimal zu fassen

[1]) Siehe l. c. § 18.

: die Metrik ist bekannt, wenn bekannt ist, welche unter den linearen bildungen des Vektorkörpers im beliebigen Punkte P_0 auf sich selber er auf den Vektorkörper in einem unendlich benachbarten Punkte P ngruente Abbildungen sind („*Metrik im Punkte* P_0“ und „*metrischer usammenhang von* P_0 *mit* P“). Die „Drehungen“, d. s. die kongruenten bildungen des Vektorkörpers im Punkte P_0 auf sich selber, müssen eine uppe bilden und das „Volumen“ eines von n Vektoren aufgespannten rallelepipeds ungeändert lassen (denn es lassen sich, noch vor aller aßbestimmung, an einer Stelle die n-dimensionalen Vektorparallelepipede iteinander vergleichen). Wird die Gruppeneigenschaft auch auf den etrischen Zusammenhang ausgedehnt, so liegen in ihr die folgenden drei rderungen:

1. für die „Drehungen“, daß sie eine Gruppe bilden;

2. für die kongruenten Verpflanzungen von P_0 nach einem *bestimmten* P_0 unendlich benachbarten Punkte P: daß alle diese Verpflanzungen s einer von ihnen, A, durch Hinzufügung einer willkürlichen Drehung P_0 entstehen und daß die Gruppe $\mathfrak{G}$ der Drehungen in P aus der rehungsgruppe $\mathfrak{G}_0$ in P_0 durch „Transformation“ mittels einer solchen ngruenten Verpflanzung A entsteht: $\mathfrak{G} = A\,\mathfrak{G}_0\,A^{-1}$;

3. für den metrischen Zusammenhang von P_0 mit *allen* Punkten iner unmittelbaren Umgebung: daß durch Hintereinanderausführung einer finitesimalen kongruenten Verpflanzung des Vektorkörpers durch die Verhiebung dx_i [d. h. vom Punkte $P_0 = (x_i^0)$ nach der Stelle $P = (x_i^0 + dx_i)$] nd einer zweiten solchen Verpflanzung durch die Verschiebung δx_i eine rch die resultierende Verschiebung $dx_i + \delta x_i$ bewirkte infinitesimale ngruente Verpflanzung zustande kommt. — Eine kongruente Verpflanng ist infinitesimal, wenn die Änderungen $d\xi^i$ der Komponenten ξ^i eines liebigen Vektors von der gleichen Größenordnung unendlich klein sind e die Komponenten dx_i der vorgenommenen Verschiebung des Zentrums. t also

$$d\xi^i = \varepsilon \cdot \sum_k \Lambda^i_{k1}\,\xi^k$$

ne beliebige infinitesimale kongruente Verpflanzung in Richtung der sten Koordinatenachse, nach dem Punkte $(x_1^0 + \varepsilon,\ x_2^0,\ \ldots,\ x_n^0)$, und ben $\Lambda^i_{k2}, \ldots, \Lambda^i_{kn}$ eine analoge Bedeutung für die 2-te bis n-te Koornatenachse (ε ist eine infinitesimale Konstante), so liefert die Formel

$$d\xi^i = \sum_{kr} \Lambda^i_{kr}\,\xi^k\,dx_r$$

n „System infinitesimaler kongruenter Verpflanzungen“ nach den sämthen Punkten der Umgebung von P_0.

Unter *Parallelverschiebung* des Vektorkörpers von P_0 nach dem unendlich benachbarten Punkte P verstehe ich die Verpflanzung sämtlicher Vektoren von P_0 nach P *ohne Änderung ihrer Komponenten*. Dieser Begriff ist aber abhängig vom Koordinatensystem, so daß jedem Koordinatensystem in P_0 ein *möglicher* Begriff der Parallelverschiebung entspricht. In einem bestimmten, ein für allemal fest gewählten Koordinatensystem drückt sich ein solches System möglicher Parallelverschiebungen des Vektorkörpers in $P_0 = (x_i^0)$ nach den sämtlichen Punkten $P = (x_i^0 + dx_i)$ der Umgebung von P_0 durch eine Formel aus

$$d\xi^i = -\sum_{kr} \Gamma^i_{kr} \xi^k dx_r$$

mit Koeffizienten, welche der Symmetriebedingung

$$\Gamma^i_{rk} = \Gamma^i_{kr}$$

genügen; aber auch umgekehrt stellt diese Formel bei beliebig gewählten symmetrischen Koeffizienten Γ ein mögliches System von Parallelverschiebungen dar[2]).

Das Bisherige erscheint mir als eine bloße Begriffsanalyse, Explikation dessen, was in den Begriffen *Metrik, metrischer Zusammenhang* und *Parallelverschiebung* als solchen liegt. Ich komme jetzt zum „synthetischen" Teil im Kantischen Sinne.

I. Jede Gruppe $\mathfrak{G}'$, die aus einer Gruppe $\mathfrak{G}$ linearer Transformationen durch Abänderung der Wahl des Koordinatensystems hervorgeht, nenne ich „von derselben Art" wie $\mathfrak{G}$, oder sage, sie unterscheide sich nur durch die Orientierung von $\mathfrak{G}$. Aus 2. erhellt, daß die Drehungsgruppe in allen Punkten des Raumes von der gleichen Art ist. *Die Art der Drehungsgruppe ist also für den Raum als Form der Erscheinungen charakteristisch*, sie kennzeichnet das apriorische Wesen des Raumes in metrischer Hinsicht. Die Art der Drehungsgruppe ist *eine*, darum absolut bestimmt und nicht teilhabend an der unaufhebbaren Vagheit dessen, was eine veränderliche Stelle in einer kontinuierlichen Skala einnimmt. *Nicht durch das Wesen des Raumes bestimmt ist aber* — darin liegt die eigentliche prinzipiell neue Einsicht der allgemeinen Relativitätstheorie — *die gegenseitige Orientierung der Drehungsgruppen in den verschiedenen Punkten des Raumes und der metrische Zusammenhang*; dieser ist vielmehr abhängig von der zufälligen Konstellation der Materie; an sich jedoch frei und beliebiger virtueller Veränderungen fähig. Unsere erste Forderung lautet geradezu: *das Wesen des Raumes läßt jeden möglichen metrischen Zusammenhang zu*; in dem Sinne, daß bei gegebenem Wesen

[2]) RZM (= Raum Zeit Materie, 4. Aufl., Springer, 1921), § 14.

s Raumes stets ein solcher metrischer Zusammenhang möglich ist, bei elchem die Formel (1) mit beliebig vorgegebenen Koeffizienten Λ_{kr}^{i} ein stem kongruenter Verpflanzungen des Vektorkörpers im Punkte P_0 nach n sämtlichen Punkten seiner Umgebung darstellt. — Ich bemerke dazu erkenntnistheoretischer Hinsicht: es ist nicht richtig, zu sagen, daß r Raum oder die Welt an sich, vor aller materiellen Erfüllung, ledigh eine formlose stetige Mannigfaltigkeit im Sinne der Analysis situs ist; e *Natur* der Metrik ist ihm an sich eigentümlich, nur die gegenseitige ientierung der Metriken in den verschiedenen Punkten ist zufällig, posteriori und abhängig von der materiellen Erfüllung. (Selbstverständh kann sich das Wesen des Raumes nur in einer ganz bestimmten, m gegenüber aber als zufällig zu betrachtenden quantitativen Ausgealtung in der Wirklichkeit darstellen.) In dieser Einschränkung und nächst auch nur in diesem Sinne (nicht im Sinne der Herkunft aus ner erfahrungsunabhängigen Erkenntnisquelle) müssen wir auch heute ch an der Kantischen Behauptung festhalten, daß die Euklidische eometrie a priori sei; sofern wir als den eigentlichen Inhalt der Euklidischen eometrie die Aussage betrachten, daß die Drehungsgruppe aus denjenigen nearen Transformationen besteht, welche eine nichtausgeartete quadrasche Form invariant lassen. Wenn hingegen die hier durchgeführte nalyse das Richtige trifft, so wird der ausgezeichnete Charakter dieser ythagoreischen Metrik erst dadurch verständlich, daß wir uns die Orienerung, die quantitative Bestimmtheit und Zusammenknüpfung der Metriken den verschiedenen Punkten als *frei veränderlich* denken und nicht von rnherein jene besondere Verknüpfung als starr gegeben annehmen, elche für die Euklidische Ferngeometrie charakteristisch ist.

II. Die zweite, über die bloße Begriffsanalyse hinausgehende Fordeng, welche wir aufstellen, betrifft die Beziehung, welche zwischen konuenter Verpflanzung und Parallelverschiebung besteht; sie besagt: *unter en möglichen Systemen von Parallelverschiebungen gibt es ein einziges, elches zugleich ein System kongruenter Verpflanzungen ist*; und zwar ll dies zutreffen, welche quantitative Bestimmtheit auch der nach I an ch freie metrische Zusammenhang zufolge der Konstellation der Materie genommen haben mag. Unter den infinitesimalen kongruenten Verpflanngen des Vektorkörpers in P_0 nach einem beliebigen Nachbarpunkte P also eine ausgezeichnet, die *Translation*, welche mit der Identität sammenfällt, wenn $P = P_0$ ist.

Für die Pythagoreische Maßbestimmung sind diese Forderungen erllt; und, wie ich in der vorliegenden Arbeit zu beweisen gedenke, *nur r diese*. Zu jedem Punkt P_0 gehört daher zufolge der Forderungen I nd II eine nichtausgeartete, von einem willkürlichen Vektor (ξ^i) ab-

hängige quadratische Form von bestimmtem Trägheitsindex $\sum_{ik} g_{ik}\xi^i\xi^k$, die „*metrische Fundamentalform*", welche gegenüber den Drehungen invariant ist. Die Form ist nur bis auf einen konstanten Faktor festgelegt. Durch Normierung dieses Faktors wird die Mannigfaltigkeit im Punkte $P_0 = (x_i^0)$ „geeicht"; $l = \sum g_{ik}\xi^i\xi^k$ bezeichnen wir dann als *Maßzahl* des Vektors (ξ^i). Ist

$$d\xi^i = -\sum_k d\gamma_k^i \cdot \xi^k = -\sum_{kr} \Gamma_{kr}^i \xi^k dx_r$$

die Formel für das unter II postulierte einzig „wirkliche" System von Parallelverschiebungen, so läßt sich durch diese Parallelverschiebung die Metrik und die metrische Fundamentalform nach dem Punkte $P = (x_i^0 + dx_i)$ übertragen. Die Änderungen dg_{ik} der Koeffizienten der metrischen Fundamentalform werden dabei geliefert durch die Gleichungen

$$dg_{ik} = \sum_j (g_{ij}\, d\gamma_k^j + g_{kj}\, d\gamma_i^j).$$

Nachdem wir die Mannigfaltigkeit an einer Stelle O geeicht haben, können wir dadurch, daß wir diese Gleichungen längs der von O ausgehenden Radien $x_i = \alpha_i r$ [α_i beliebige Konstanten, r der variable Parameter] integrieren, die Eichung an alle andern Raumstellen übertragen (eine Übertragung, die natürlich abhängig sein wird vom benutzten Koordinatensystem). Dadurch erscheint die Umgebung des Punktes O insbesondere in solcher Weise geeicht, daß die Maßzahl einer Strecke in O bei kongruenter Verpflanzung nach den Nachbarpunkten keine Änderung erfährt (geodätische Eichung). Daraus folgt, daß bei beliebiger Eichung die Änderung dl, welche die Maßzahl l einer Strecke durch kongruente Verpflanzung erleidet, sich aus einer Gleichung bestimmt

$$dl = -l\, d\varphi, \quad \text{in der} \quad d\varphi = \sum_i \varphi_i dx_i$$

eine lineare Differentialform ist. Die beiden Formen

$$\sum g_{ik} dx_i dx_k, \qquad \sum \varphi_i dx_i$$

beschreiben die Metrik der Mannigfaltigkeit in ihrer quantitativen Bestimmtheit. Damit ist der Anschluß an die gewöhnliche Infinitesimalgeometrie gewonnen[3]).

Es erscheint mir wesentlich, den Beweis unserer Behauptung für eine *beliebige Dimensionszahl n* zu erbringen. Denn ich glaube, daß sich erst auf Grund der Pythogoreischen Metrik die *Besonderheit der Dimensionszahl* 4, welche der wirklichen Welt zukommt, verständlich machen läßt. Nur in einer vierdimensionalen Welt existiert nämlich die aus der Strecken-

[3]) RZM, § 16.

rümmung entspringende einfachste Integralinvariante, welche als Wirkungsröße meiner Überzeugung nach den Erscheinungen des elektromagnetischen eldes zugrunde liegt[4]). Auf die Frage endlich, warum in der wirklichen elt die metrische Fundamentalform gerade den Trägheitsindex 1 besitzt, önnen wir gegenwärtig keine andere Antwort geben als die: daß allein diesem Fall eine *Scheidung von Vergangenheit und Zukunft* möglich t, da nur im Falle des Trägheitsindex 1 der infinitesimale Kegel $\sum g_{ik} dx_i dx_k = 0$ durch seine Spitze in zwei Mäntel zerlegt wird.

Nun zur mathematischen Formulierung unserer beiden Forderungen und II! Durch sie werden gewisse Eigenschaften der infinitesimalen rehungsgruppe $\mathfrak{g}$ festgelegt. Zu ihr hat man bekanntlich eine Matrix A ann und nur dann zu rechnen, wenn es in der Drehungsgruppe eine von ε abhängige) lineare Transformation gibt, welche mit[5]) $E + \varepsilon A$ übernstimmt bis auf einen Fehler, der mit ε stärker gegen 0 konvergiert ls ε selber. Die infinitesimale Drehungsgruppe ist nach Lie eine lineare char von besonderer Art; mit irgend zwei zu ihr gehörigen Matrizen A nd B tritt nämlich in ihr immer auch die Matrix

$$[AB] = AB - BA$$

uf (diese Operation bezeichnen wir hier als „Zusammensetzung" der latrizen). n Matrizen von $\mathfrak{g}$:

$$A_1 = (a^i_{k1}),\ A_2 = (a^i_{k2}),\ \ldots,\ A_n = (a^i_{kn})$$

ilden eine *symmetrische Doppelmatrix* in $\mathfrak{g}$, wenn allgemein die i-te palte von A_k gleich der k-ten Spalte von A_i ist:

$$a^r_{ki} = a^r_{ik};$$

ie Formel

$$\zeta^r = \sum_{ik} a^r_{ik} \xi^i \eta^k$$

rdnet dann je zwei Vektoren ξ, η in bilinearer symmetrischer Weise inen dritten Vektor ζ so zu, daß für jeden festen Vektor η der Überang von ξ zu ζ eine Operation der Gruppe $\mathfrak{g}$ ist.

Die infinitesimale Drehungsgruppe $\mathfrak{g}$ *hat folgende Eigenschaften*[6]):

a) *die Spur einer Matrix von* $\mathfrak{g}$ *ist* 0;

b) *es existiert in* $\mathfrak{g}$ *keine andere symmetrische Doppelmatrix als* 0;

c) *die Dimensionszahl von* $\mathfrak{g}$ *ist die höchste, welche mit der Eigenschaft* b) *verträglich ist, nämlich* $\frac{n(n-1)}{2}$.

---

[4]) Vgl. RZM, §§ 35, 36; ferner den Aufsatz des Verf. „Über die physikalischen Grundlagen der erweiterten Relativitätstheorie" in der Physik. Zeitschr. 22 (1921).

[5]) E bezeichnet die Einheitsmatrix, deren Elemente δ_{ik} (= 1 für $i = k$, hingegen = 0 für $i \neq k$) sind.

[6]) Die Herleitung ist genauer durchgeführt in RZM, S. 131–132.

Die infinitesimale Gruppe $\mathfrak{g}_Q$ derjenigen Operationen, welche die nichtausgeartete quadratische Form Q mit den Koeffizienten g_{ik} invariant lassen, besteht aus allen Matrizen (a_k^i), für welche

$$\sum_j (g_{ij} a_k^j + g_{kj} a_i^j) = 0$$

gilt. Ist die quadratische Form insbesondere die Einheitsform mit den Koeffizienten δ_{ik}, so besteht $\mathfrak{g}_Q = \mathfrak{g}_0$ aus allen schiefsymmetrischen Matrizen. Die Bestimmung aller infinitesimalen Gruppen mit den oben angegebenen Eigenschaften ist offenbar eine rein algebraische Aufgabe (im Gegensatz zu dem gruppentheoretischen Problem, zu welchem die Helmholtzsche Axiomatik führte); wir können deshalb im Bereich der *komplexen* statt nur der reellen Größen operieren. Das hat zur Folge, daß alle Gruppen $\mathfrak{g}_Q$ von derselben Art sind wie $\mathfrak{g}_0$: die Unterschiede des Trägheitsindex fallen dahin. Der von uns behauptete Satz lautet:

Die infinitesimale Euklidische Drehungsgruppe $\mathfrak{g}_0$ hat die oben geforderten Eigenschaften a), b), c); *und umgekehrt: jede infinitesimale Gruppe, welche jenen Forderungen genügt, unterscheidet sich nur durch die Orientierung von $\mathfrak{g}_0$, ist also mit der zu einer gewissen nichtausgearteten quadratischen Form Q gehörigen Gruppe $\mathfrak{g}_Q$ identisch.*

Der erste Teil ergibt sich durch eine ganz einfache Rechnung, die den Kern der Bestimmung der Christoffelschen Dreiindizessymbole aus den Koeffizienten der metrischen Fundamentalform bildet. Der Beweis der Umkehrung ist mir leider nicht durch Versenkung in den Sinn der aufgestellten Forderungen, sondern nur durch mathematische Seiltänzerei gelungen. — Die Wichtigkeit des zu beweisenden Satzes liegt für mich — das möchte ich zum Schluß noch einmal hervorheben — durchaus nicht in seiner mathematischen, sondern allein in seiner transienten Bedeutung für das Raumproblem. Ich erblicke in ihm eine Bestätigung der Richtigkeit meiner ganzen Gedankeneinstellung zum Raumproblem durch die Logik (analog etwa wie das Vorrücken des Merkurperihels für Einstein eine Bestätigung der Richtigkeit seiner Gedankeneinstellung zum Gravitationsproblem durch die Tatsachen war).

§ 2.

Die niedersten Dimensionszahlen 1, 2, 3.

Fortan bezeichnen wir die Variablen, welche den linearen Transformationen der inf. Gruppe $\mathfrak{g}$ zu unterwerfen sind, stets mit $x_1, x_2, \ldots, x_n$. $\mathfrak{g}$ genügt nach Voraussetzung den in § 1 ausgesprochenen Bedingungen a), b), c). Zu jeder linearen Transformation (Matrix) $A = (a_{ik})$ gehört unabhängig vom Koordinatensystem das *charakteristische Polynom*

$$\det.(\lambda E - A) = \lambda^n - S_1 \cdot \lambda^{n-1} + \ldots \mp S_n,$$

essen Nullstellen die *charakteristischen Wurzeln* sind.

Über die *Dimensionszahl* 1 ist kein Wort zu verlieren.

Im *Falle* $n = 2$ können wir unseren Satz durch direkte Rechnung estätigen. $\mathfrak{g}$ besteht aus den Multipla einer einzigen Matrix

$$A = \left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\|,$$

eren Spur $a_{11} + a_{22}$ verschwindet. Die Voraussetzung, daß keine sym-ietrische Doppelmatrix in der Gruppe existiert außer 0, besagt, daß aus er Bedingung: zweite Spalte von $\gamma_2 A$ gleich der ersten Spalte von $-\gamma_1 A$, as Verschwinden der beiden Zahlen γ_1, γ_2 folgt; oder die Gleichungen

$$a_{11}\gamma_1 + a_{12}\gamma_2 = 0,$$
$$a_{21}\gamma_1 + a_{22}\gamma_2 = 0$$

aben keine Lösung außer $\gamma_1 = \gamma_2 = 0$; oder die Determinante von A ist $\neq 0$. Die nicht-ausgeartete quadratische Form, welche bei der inf. Trans-ormation A ungeändert bleibt, bestimmt sich nunmehr einfach aus

$$g_{11} = a_{21}, \qquad g_{12} = -a_{11},$$
$$g_{21} = a_{22}, \qquad g_{22} = -a_{12}.$$

Wir gehen zur *Dimensionszahl* 3 über. Im charakteristischen Polynom er allgemeinen, von drei Parametern linear abhängigen Gruppenmatrix erschwindet nach Voraussetzung der Koeffizient S_1, die Spur, identisch. nfolgedessen können wir durch die beiden Gleichungen $S_2 = 0$, $S_3 = 0$ ine nicht-verschwindende Matrix der Gruppe bestimmen, deren sämtliche harakteristische Wurzeln 0 sind. Ihr läßt sich nach der Elementarteiler-heorie durch geeignete Wahl des Koordinatensystems die Gestalt geben

$$R_0 = \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{matrix} \right\| \quad \text{oder} \quad \left\| \begin{matrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{matrix} \right\|.$$

Die zweite Möglichkeit scheidet hier aus nach dem folgenden, für beliebige Dimensionszahlen gültigen Prinzip:

I. *Eine Matrix der Gruppe, in der alle Spalten bis auf eine mit Nullen besetzt sind, ist überhaupt* $= 0$.

Sei nämlich A eine solche Matrix, in welcher alle Spalten bis auf die erste verschwinden; dann ist die folgende Reihe von n Matrizen:

$$A, 0, 0, \ldots, 0$$

offenbar eine symmetrische Doppelmatrix.

Wir dürfen demnach annehmen, daß unsere Gruppe die Matrix R_0 enthält. Aus der willkürlichen Gruppenmatrix A bilden wir $A' = [R_0 A]$ und wiederholen diese von A zu A' führende Operation. Wir erhalten dann der Reihe nach

$$A = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{Vmatrix}, \qquad A' = \begin{Vmatrix} a_{31}, & a_{32} - a_{13}, & a_{33} - a_{11} \\ 0, & -a_{23}, & -a_{21} \\ a_{21}, & a_{22} - a_{33}, & a_{23} - a_{31} \end{Vmatrix},$$

$$A'' = \begin{Vmatrix} a_{21}, & a_{22} - 2a_{33} + a_{11}, & a_{23} - 2a_{31} \\ 0, & a_{21} & 0 \\ 0, & -2a_{23} + a_{31}, & -2a_{21} \end{Vmatrix},$$

$$A''' = \begin{Vmatrix} 0, & -3a_{23} + 3a_{31}, & -3a_{21} \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 3a_{21}, & 0 \end{Vmatrix}, \qquad A'''' = \begin{Vmatrix} 0, & 6a_{21}, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Indem wir die Reihe der „Abgeleiteten" rückwärts durchlaufen, schließen wir mit Hilfe des Prinzips I

$$\begin{aligned} &\text{aus } A'''': && a_{21} = 0; \\ &\text{darauf aus } A''': && a_{31} = a_{23} (= a); \\ &\text{darauf aus } A'' + aR_0: && a_{22} - 2a_{33} + a_{11} = 0. \end{aligned}$$

Wegen des Verschwindens der Spur ist also

$$a_{11} + a_{22} = 0, \qquad a_{33} = 0.$$

Endlich gehen wir zu A' oder vielmehr zu $A' + a_{11} R_0$ zurück; diese Matrix lautet

$$A^* = \begin{Vmatrix} a, & a_{32} - a_{13}, & 0 \\ 0, & -a, & 0 \\ 0, & 0, & 0 \end{Vmatrix}.$$

Sie kann nicht identisch verschwinden. Denn wäre das der Fall, so wäre A gleich einem Multiplum von R_0 plus

$$\bar{A} = \begin{Vmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

Ein solches $\bar{A}$ aber muß nach dem Prinzip I verschwinden, wenn $a_{11} = 0$ wird; also gibt es höchstens *eine* linear unabhängige Matrix von der Form $\bar{A}$ in unserer Schar. Dieser Widerspruch zeigt die Existenz eines nicht-verschwindenden A^*. In diesem A^* muß dann insbesondere (wieder in-

lge des Prinzips I) $a \neq 0$ sein; wir können $a = 1$ nehmen. Damit haben ir eine Matrix von der Gestalt gewonnen:

$$\begin{Vmatrix} 1 & \alpha & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

rsetzt man die Koordinate x_1 durch $x_1 + \frac{\alpha}{2} x_2$, so nimmt im neuen oordinatensystem diese Matrix die Form an

$$A_1 = \begin{Vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

ne daß R_0 sich ändert. Dann ergibt sich aus A^* (das ein Multiplum on A_1 sein muß) weiter allgemein $a_{32} = a_{13}$, und A ist gleich einem ultiplum von $R_0 +$ einem Multiplum von A_1

$$+ \begin{Vmatrix} 0 & a_{12} & 0 \\ 0 & 0 & a \\ a & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

a es nach Früherem ein A gibt, für welches $a \neq 0$ ist, so erhalten wir rittens in unserer Gruppe eine Matrix, die so aussieht:

$$A_2 = \begin{Vmatrix} 0 & \beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}.$$

ie letzte, noch nicht ausgenutzte Gruppenbedingung:

$$A_{21} = [A_2 A_1] = \begin{Vmatrix} 0 & -2\beta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{Vmatrix}$$

etzt sich linear aus R_0, A_1, A_2 zusammen, liefert $A_{21} = A_2$ und damit $= 0$. Wir sind so schließlich bei einer einzigen inf. Gruppe angelangt, elche durch die Formel

$$\begin{Vmatrix} \varrho & 0 & \alpha \\ 0 & -\varrho & \beta \\ \beta & \alpha & 0 \end{Vmatrix}$$

nit den Parametern ϱ, α, β dargestellt wird. *Es ist die Gruppe derjenigen nf. Transformationen, welche die nicht-ausgeartete quadratische Form*

$$2 x_1 x_2 - x_3^2$$

nvariant lassen.

§ 3.

Die Grundlagen des Beweises.

Eine Verallgemeinerung des soeben beständig herangezogenen Prinzips I bietet im allgemeinen Fall in ganz analoger Weise das Mittel zur Verkettung der Schlüsse. Wir betrachten diejenigen Matrizen A unserer Gruppe, in denen bestimmte r Kolonnen mit Nullen besetzt sind; außerdem seien s lineare homogene, voneinander unabhängige Bedingungen gegeben, denen jede Kolonne von A zu genügen hat. Diese Bedingungen können insbesondere darin bestehen, daß bestimmte s Zeilen verschwinden sollen. Wie viele linear unabhängige Matrizen unserer Gruppe der gewünschten Art kann es höchstens geben? Ihre Anzahl sei N. Die r mit Nullen besetzten Kolonnen seien die r letzten. Wir wählen willkürlich $r' = n - r$ Matrizen der zu untersuchenden Art $A_1, A_2, \ldots, A_{r'}$ und fügen dieser Reihe noch r Matrizen 0 hinzu. Die so erhaltene Reihe ist eine symmetrische Doppelmatrix, wenn allgemein die k-te Spalte von A_i gleich der i-ten Spalte von A_k ist $(i, k = 1, 2, \ldots, r')$. Da die Übereinstimmung zweier Spalten, die ja beide den gleichen s linearen Beziehungen genügen, durch $s' = n - s$ Bedingungsgleichungen herbeigeführt werden kann, formuliert sich die Aufgabe der Bestimmung einer Doppelmatrix von dieser Beschaffenheit in $\frac{r'(r'-1)}{2} \cdot s'$ linearen homogenen Gleichungen für $r'N$ Unbekannte. Soll 0 die einzige Lösung sein, so muß

$$r'N \leqq \frac{r'(r'-1)}{2} \cdot s', \qquad N \leqq \frac{s'(r'-1)}{2}$$

sein; d. i. um wenigstens

$$\frac{r+s}{2} \cdot n - \frac{(r+1)s}{2}$$

weniger als die Parameterzahl $\frac{n(n-1)}{2}$ der totalen Gruppe. Dies Ergebnis können wir offenbar in doppelter Weise so aussprechen:

Diejenigen Matrizen von $\mathfrak{g}$, *deren Zeilen* r *und deren Kolonnen* s *unabhängigen linearen homogenen Gleichungen genügen, bilden eine lineare Schar höchstens vom Grade* $\frac{s'(r'-1)}{2}$; *oder: Verlangt man von einer willkürlichen Matrix* A *der inf. Gruppe, daß jede ihrer Zeilen denselben* r, *jede ihrer Kolonnen* s *unabhängigen linearen homogenen Gleichungen genügt, so involviert das mindestens* $\frac{r+s}{2} \cdot n - \frac{(r+1)s}{2}$ *unabhängige Bedingungsgleichungen zwischen den Parametern von* A.

Von diesem allgemeinen Satze wird im folgenden außer dem Prinzip I
ır derjenige Fall zur Anwendung kommen, wo $r = s$ ist und die betr.
eichungen fordern, daß r Zeilen und r Kolonnen verschwinden.

II. *Diejenigen Matrizen der Gruppe, in denen alle Zeilen und olonnen bis auf je r verschwinden, bilden eine lineare Schar höchstens m Grade* $\frac{r(r-1)}{2}$; *oder: Das Verschwinden von bestimmten r Zeilen id r Kolonnen in der allgemeinen Matrix von* g *kann nur durch enigstens* $rn - \frac{r(r+1)}{2}$ *unabhängige Bedingungen für deren Parameter wirkt werden.*

Wir erwähnen noch das folgende Seitenstück zu I:

I′. *Eine Matrix unserer Gruppe, in der alle Zeilen bis auf eine rschwinden, ist* 0.

Man kann das aus I herleiten oder auch direkt so einsehen: Ist
$, a_2, \ldots, a_n$ die eine vorhandene Zeile der Matrix A, so ist $a_1 A, a_2 A, \ldots, a_n A$
ne symmetrische Doppelmatrix, und daher $a_i a_k = 0$, $a_i^2 = 0$, $a_i = 0$.

Kommt in g eine „Hauptmatrix“ H vor, in der alle Elemente außer-
lb der Hauptdiagonale verschwinden, während in der Hauptdiagonale die
hlen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ stehen, so bilde man die Differenzen $\alpha_i - \alpha_k$ und
ile mit Bezug auf H das Schema einer beliebigen Matrix in „Länder“
n, indem man jedem Feld (ik) des Schemas (i der Zeilen-, k der
olonnenindex) die Zahl $\alpha_i - \alpha_k$ als „Multiplikator“ zuordnet und zwei
elder dann und nur dann zum gleichen Lande rechnet, wenn sie den
eichen Multiplikator besitzen. Dann gilt als eine Folge der Gruppen-
genschaft der Satz:

III. *In der allgemeinen Matrix unserer Gruppe sind die einzelnen änder voneinander unabhängig*; d. h. jede Gruppenmatrix kann aus
lchen in der Gruppe enthaltenen Matrizen additiv zusammengesetzt
erden, die nur in je *einem* Lande von 0 verschiedene Elemente auf-
eisen. Beweis: Die ihrem Zahlwerte nach verschiedenen Multiplikatoren
ien $\omega_0 = 0$, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_l$. Die Matrix $A' = [HA]$ entsteht dadurch
is A, daß die Elemente des zum Multiplikator ω_μ gehörigen Landes mit
multipliziert werden. Bestimmen wir also $l+1$ Zahlen $c_0, c_1, \ldots, c_l$
, daß

$$c_0 + c_1 \omega_\nu + c_2 \omega_\nu^2 + \ldots + c_l \omega_\nu^l = \delta_{\mu\nu} \qquad (\nu = 0, 1, \ldots, l)$$

ird, so ist

$$c_0 A + c_1 A' + c_2 A'' + \ldots + c_l A^{(l)}$$

eine Matrix, die im μ-ten Land mit A übereinstimmt, in allen andern Ländern aber verschwindet.

$$\begin{array}{|cccc|}\hline 0 & 1 & 0 & \ldots\ 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots\ 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\ \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ 1 \\ 0 & 0 & 0 & \ldots\ 0 \\ \hline\end{array}$$

Zum Beweise des Haupttheorems gehen wir wie im Falle $n = 3$ aus von einer Matrix R_0, deren sämtliche charakteristische Wurzeln 0 sind. Bei geeigneter Wahl des Koordinatensystems setzt sich R_0 zusammen aus Quadraten von nebenstehender Form, die sich längs der Hauptdiagonale aneinander reihen. Ist $\mu + 1$ die Zahl der Zeilen und Kolonnen in einem solchen Quadrat, so nennen wir μ seine Ordnungszahl. Sind $\mu_1 \geqq \mu_2 \geqq \ldots \geqq \mu_e$ die Ordnungszahlen der Quadrate, aus denen sich R_0 zusammensetzt, soweit sie $\geqq 1$ sind, so sagen wir, R_0 sei vom Typus $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_e$. Die Summe h dieser Ordnungszahlen ist der Rang von R_0. Da nach dem Prinzip I der Rang $h = 1$ ausgeschlossen ist, sind die niedersten möglichen Typen von R_0 die beiden, welche dem Range 2 entsprechen; nämlich 2 und $1 + 1$. Diese werden wir zunächst diskutieren (§§ 4, 5) und zeigen, daß sie auf eine Gruppe $\mathfrak{g}_Q$ führen. Hernach werden wir auf sie die höheren Fälle zurückführen. Zur Vorbereitung der Reduktion eines beliebigen R_0 fassen wir zunächst in § 6 den Typus $1 + 1 + \ldots + 1$, in § 7 den Typus h ins Auge. In § 8 folgt der Hauptteil des allgemeinen Beweises, in § 9 die Erledigung des dabei übrigbleibenden Typus $2 + 1$.

Noch ein paar Worte über die angewendeten Bezeichnungen! Leergelassene Stellen einer Matrix sind stets mit 0 zu besetzen; als Zeichen für die Besetzung durch irgendwelche Zahlen, welche nicht benannt zu werden brauchen, dient der $*$. Zuweilen wird von einer Matrix nur ein rechteckiger Ausschnitt hingeschrieben; am Rande sind dann die Zeilen- und Kolonnennummern vermerkt, denen dieser Ausschnitt entspricht; wenn nichts anderes angegeben wird, ist der nicht hingeschriebene Teil mit Nullen auszufüllen. Die Randnumerierung kann unterbleiben, wenn die Nummern von 1 ab in ununterbrochener Reihenfolge laufen.

§ 4.

Typus 2.

$$R_0 = \begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ \hline\end{array}.$$

Es handelt sich offenbar um Übertragung der in § 2 durchgeführten Untersuchung von $n = 3$ auf beliebiges n. Wie dort bilden wir aus einer beliebigen Matrix A der Gruppe durch „Zusammensetzung“ mit R_0: A', A'', A''' A''''. In dem Quadrat, in welchem sich die ersten drei Zeilen mit den ersten drei Kolonnen durchkreuzen, lauten diese Matrizen wie dort angegeben. Es kommt bei A' und A'' der folgende Rand hinzu:

*	$a_{34} \dots a_{3n}$ $0 \dots 0$ $a_{24} \dots a_{2n}$
$0, -a_{43}, -a_{41}$ . . . . $0, -a_{n3}, -a_{n1}$	0

, bzw.

*	$a_{24} \dots a_{2n}$ $0 \dots 0$ $0 \dots 0$
$0 \quad a_{41} \quad 0$ . . . . $0 \quad a_{n1} \quad 0$	0

.

r erhalten aus A'''' und A''':

$$a_{21} = 0, \quad a_{31} = a_{23} (= a).$$

ir führen die Bedingungen ein:

)
$$a_{24} = \dots = a_{2n} = 0.$$

is $A'' + a R_0$ liefert darauf das Prinzip I:

)
$$\begin{cases} a_{41} = \dots = a_{n1} = 0, \\ a_{33} - a_{11} = a_{22} - a_{33} \ (= b). \end{cases}$$

h behaupte zunächst: *aus* (2) *folgt nicht* $a = 0$.

Wir nehmen das Gegenteil an und werden dadurch zu einem Widerruch gelangen. (2) enthält höchstens $n - 3$ unabhängige Bedingungen; gen wir noch hinzu

)
$$a_{11} = a_{22} = 0,$$

fehlen in A die erste Spalte und die zweite Zeile. Also müssen nach unter den gestellten Bedingungen mindestens $n - 1$ unabhängige vorhanden sein. Daraus ergibt sich, daß die $n - 3$ Gleichungen (2) voneinander unabhängig sind, und wir besitzen in A'', wenn wir noch ein beliebiges Multiplum von R_0 addieren, eine Gruppenmatrix

) $\mathsf{A} =$

$0 \quad * \quad \alpha_3 \quad \alpha_4 \quad \dots \quad \alpha_n$
0
α_3'
α_4'
$\vdots$
α_n'

mit *beliebigen Zahlen* $\alpha_3, \alpha_4, \dots, \alpha_n$; dabei ist $\alpha_3' = \alpha_3$.

Da nach I mit den α auch die α' notwendig verschwinden, können wir setzen

$$\alpha_i' = \sum_{k=3}^{n} g_{ik} \alpha_k \quad (i = 3, 4, \dots, n).$$

ie Determinante der Konstanten g_{ik} ist $\neq 0$, da nach I' die α' nicht erschwinden können, ohne daß auch alle $\alpha = 0$ werden. Außerdem ist

$$g_{33} = 1, \quad g_{34} = \dots = g_{3n} = 0.$$

us zwei derartigen Matrizen A und $\bar{\mathsf{A}}$ bilden wir

$$\mathsf{A}\bar{\mathsf{A}} = \left| \sum_i \alpha_i \bar{\alpha}_i' \right|_1^2.$$

Die Bilinearform

$$\sum_{i,k=3}^{n} g_{ik}\alpha_i\bar{\alpha}_k \tag{6}$$

ist also eine Invariante gegenüber linearer Transformation der Koordinaten $x_3, x_4, \ldots, x_n$. Sie ist symmetrisch, da aus der in der Gruppe vorhandenen Matrix $[\mathsf{A}\,\bar{\mathsf{A}}]$ das Prinzip I die Gleichung zu schließen gestattet:

$$\sum_i \alpha_i\bar{\alpha}_i' - \sum_i \bar{\alpha}_i\alpha_i' = 0.$$

Die zugehörige nicht-ausgeartete quadratische Form

$$\alpha_3^2 + \sum_{i,k=4}^{n} g_{ik}\alpha_i\alpha_k$$

kann durch lineare Transformation der Variablen $x_4, \ldots, x_n$ auf die Normalform

$$\alpha_3^2 + (\alpha_4^2 + \ldots + \alpha_n^2)$$

gebracht werden; dann ist in (5) allgemein

$$\alpha_i' = \alpha_i.$$

Betrachten wir jetzt wieder eine beliebige, den Bedingungen (2) genügende Matrix A; in ihr verschwindet die ganze zweite Zeile bis auf das Element a_{22} und die ganze erste Spalte bis auf das Element a_{11}. Bilden wir daraus durch Zusammensetzung $\bar{\mathsf{A}} = [\mathsf{A}\,A]$, so hat $\bar{\mathsf{A}}$ die gleiche Form wie A; nur sind an Stelle der Zahlen α_i, α_i' die folgenden getreten

$$\bar{\alpha}_i = \sum_{k=3}^{n} a_{ki}\alpha_k - a_{11}\alpha_i,$$

$$\bar{\alpha}_i' = a_{22}\alpha_i - \sum_{k=3}^{n} a_{ik}\alpha_k.$$

Da nun $\bar{\alpha}_i' = \bar{\alpha}_i$ sein muß, erhalten wir

$$a_{ik} + a_{ki} = (a_{11} + a_{22})\,\delta_{ik} \qquad (i, k = 3, 4, \ldots, n). \tag{7}$$

Wenden wir diese Gleichung insbesondere auf $i = k$ an, so kommt

$$a_{11} + a_{22} = 2c, \qquad a_{33} = \ldots = a_{nn} = c,$$

und die Spur von A ist $= nc$. Daher liefert die Forderung verschwindender Spur die Gleichung

$$c = 0, \qquad a_{11} + a_{22} = 0. \tag{8}$$

Da diese Beziehung aus (2) folgt, sind (2) und (4) zusammen nicht $n-1$ unabhängige Bedingungen, wie es doch sein mußte.

Zu einem A, das den Bedingungen (2), (3) genügt, für welches aber $\neq 0$ ist und daher $= 1$ genommen werden kann, erhalten wir ein $' - b R_0$ von folgender Form

1	α	0	a_4	$\dots$ a_n
	-1			
	0			
	b_4			
	$\vdots$			
	b_n			

Führen wir an Stelle der Koordinaten x_i neue y_i ein durch die Gleichungen

$$y_1 = x_1 + \alpha' x_2 + (a_4 x_4 + \dots + a_n x_n),$$
$$y_2 = x_2 \quad | \quad y_4 = x_4 + b_4 x_2,$$
$$y_3 = x_3 \quad | \quad \dots\dots\dots$$
$$| \quad y_n = x_n + b_n x_2$$

mit $2\alpha' = \alpha + (a_4 b_4 + \dots + a_n b_n)$,

gewinnt diese Matrix die einfache Gestalt

$$A_1 = \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 0 \\ 0 & -1 \\ \hline \end{array},$$

ährend R_0 ungeändert bleibt. Zu ihr gehört die folgende, durch die Multiplikatoren gekennzeichnete Einteilung einer beliebigen Matrix in fünf nabhängige Länder (die nicht ausgezogenen Striche und Zeichen $\times$, † nöge man vorerst ignorieren):

0	2	†	1
-2	0	$\times$	-1
$\times$	†		
			0
-1	1		

Länder, die nur aus Feldern einer Kolonne, insbesondere nur aus einem Felde bestehen, müssen nach Prinzip I leer sein; also ist außer $a_{31} = 0$ auch $a_{12} = 0$.

Ein den Gleichungen (2), (3) genügendes A mit $a = 1$ liefert als seinen dem Lande -1 angehörenden, nach III selbständigen Bestandteil die Gruppenmatrix R_0^*.

$$R_0^* = \begin{array}{|ccc|}\hline 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ \hline \end{array}.$$

Infolgedessen und wegen der allgemein gültigen Gleichung $a_{23} = a_{31}$ ann das Land -1 noch wieder in zwei unabhängige Bestandteile erlegt werden, von denen der eine, $\times$, lediglich aus den beiden Feldern (2 3) und (3 1) besteht; der andere Bestandteil heiße $(-1)'$. nalog wie mittels R_0 sich die Gleichung $a_{23} = a_{31}$ ergibt, liefert R_0^* ie Beziehung $a_{32} = a_{13}$. Infolgedessen zerfällt das Land $+1$ ebenlls in zwei unabhängige Bestandteile: †, bestehend aus den beiden eldern (1 3), (3 2), und $(+1)'$. Aus jeder in der Gruppe vorkommenden usfüllung A des Landes $(-1)'$ entsteht durch den Übergang von A zu A'' eine Ausfüllung des Landes $(+1)'$ durch die gleichen Zahlen; zweialige Zusammensetzung mit R_0 verwandelt das eine in das andere. ittels analoger Verwendung von R_0^* an Stelle von R_0 wird aber auch

umgekehrt eine beliebige vorkommende Ausfüllung des Landes $(+1)'$ in die gleichlautende des Landes $(-1)'$ zurückverwandelt. Ist also m die Anzahl der zu $(+1)'$ gehörigen unabhängigen Matrizen, d. h. derjenigen in der Gruppe vorkommenden Matrizen, welche außerhalb des Landes $(+1)'$ lauter Nullen aufweisen, so ist die Anzahl der zu $(-1)'$ gehörigen Matrizen ebenso groß. Eine zu $(+1)'$ gehörige Matrix hat die Form (5), wobei noch der $*$ sowie α_3 und α_3' verschwinden. Sie wird nach I notwendig 0, wenn die Reihe $\alpha_4 \ldots \alpha_n$ verschwindet; darum ist $m \leqq n-3$. Die Zahl der unabhängigen Bedingungen, welche die ersten beiden Zeilen und Kolonnen einer beliebigen Gruppenmatrix auslöschen, ist jetzt offenbar höchstens gleich $2m+4$. Sie muß andererseits mindestens $2n-3$ sein (nach Prinzip II); daher

$$2m \geqq 2n-7, \qquad m = n-3.$$

Damit ist gezeigt, daß ein A wie in (5) existiert mit *beliebigen* Zahlen $\alpha_3, \alpha_4, \ldots, \alpha_n$, wobei wie dort $\alpha_3' = \alpha_3$, aber der $* = 0$ zu setzen ist. Daraus ergeben sich wie früher vermöge einer geeigneten Transformation der Koordinaten $x_4 \ldots x_n$ die Gleichungen $\alpha_i' = \alpha_i$;

$$(8)\quad a_{11}+a_{22}=0, \qquad (7)\quad a_{ik}+a_{ki}=0 \quad (i,k=3,4,\ldots,n).$$

Die letzteren, (7) und (8), sind nicht an die Bedingungen (2) gebunden, weil diese Bedingungen und jene Gleichungen zwei verschiedene Länder betreffen. Die beliebige Matrix A aber hat die nebenstehende Gestalt

(der nicht ausgefüllte Teil ist schiefsymmetrisch).

ϱ	0	$\alpha_3 \ldots \alpha_n$
0	$-\varrho$	$\beta_3 \ldots \beta_n$
β_3	α_3	
$\cdot$	$\cdot$	
$\cdot$	$\cdot$	$*$
$\cdot$	$\cdot$	
β_n	α_n	

Das ist die Gruppe derjenigen inf. Transformationen, welche die quadratische Form

$$2x_1x_2-(x_3^2+\ldots+x_n^2)$$

invariant lassen.

Der Beweis ist möglichst konstruktiv durchgeführt und so, daß er Schritt für Schritt dem im folgenden Paragraphen entwickelten Gedankengang zur Erledigung des Typus $1+1$ korrespondiert.

§ 5.

Typus $1+1$.

$$R_0 = \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \end{array}\ \begin{matrix}3\\4\end{matrix}\ .$$
$$\begin{matrix}1 & 2\end{matrix}$$

Durch zweimalige Zusammensetzung von R_0 mit einer beliebigen Gruppenmatrix $A = (a_{ik})$ entsteht

$$A'' = \begin{array}{|cc|}\hline a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \\ \hline \end{array}\ \begin{matrix}3\\4\end{matrix}\ .$$
$$\begin{matrix}1 & 2\end{matrix}$$

Da nach Prinzip II nur *eine* linear unabhängige Matrix von dieser Form existieren kann, muß A'' ein Multiplum von R_0 sein,

$$\left\| \begin{matrix} a_{13} & a_{14} \\ a_{23} & a_{24} \end{matrix} \right\| = \left\| \begin{matrix} a & 0 \\ 0 & a \end{matrix} \right\|.$$

ıter Berücksichtigung dieses Umstandes lautet das durch einmalige Zu-mmensetzung mit R_0 aus A entstandene

0) A':

a	0		
0	a		
$a_{33} - a_{11}$,	$a_{34} - a_{12}$	$-a$ 0	$-a_{15} \dots -a_{1n}$
$a_{43} - a_{21}$,	$a_{44} - a_{22}$	0 $-a$	$-a_{25} \dots -a_{2n}$
a_{53}	a_{54}		
$\vdots$	$\vdots$		
a_{n3}	a_{n4}		

ußer R_0 ist kein „Regulator", d. i. keine weitere Gruppenmatrix von der ɔrm

1) $R = \begin{matrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \\ \alpha_3 & \beta_3 \\ \vdots & \vdots \\ \alpha_n & \beta_n \end{matrix}$

vorhanden. Der Beweis dafür wird am Schluß des Paragraphen nachgeholt. *Ich gehe jetzt zunächst darauf aus, zu zeigen, daß nicht für alle Matrizen der Gruppe a verschwinden kann.*

Beweis indirekt: Ich nehme an, es sei a stets $= 0$. Dann schließen wir aus A', daß die Bengungen

2) $$\begin{cases} a_{15} = \dots = a_{1n} = 0, \\ a_{25} = \dots = a_{2n} = 0 \end{cases}$$

e andern zur Folge haben:

3) $$\begin{cases} a_{53} = \dots = a_{n3} = 0, \\ a_{54} = \dots = a_{n4} = 0; \end{cases}$$

4) $$a_{33} - a_{11} = a_{44} - a_{22}, \quad a_{34} = a_{12}, \quad a_{43} = a_{21}.$$

igen wir noch

5) $$\left\| \begin{matrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{matrix} \right\| = 0, \quad a_{33} = 0$$

nzu, so haben wir durch höchstens $2(n-4)+5 = 2n-3$ unabhängige edingungen die ersten beiden Zeilen und die dritte und vierte Kolonne n A zum Verschwinden gebracht. Nach II sind dazu aber auch wenigens so viele Bedingungen erforderlich. Infolgedessen sind die Gleiungen (12) notwendig voneinander unabhängig; und daher besitzen r in A' eine zur Gruppe gehörige Matrix von der Form

(16) $\mathsf{A} =$

$*\quad *$ $*\quad *$		$\beta_5 \ldots \beta_n$ $\alpha_5 \ldots \alpha_n$
$\alpha_5' \quad \beta_5'$ $\cdots\quad\cdots$ $\alpha_n' \quad \alpha_n'$		

mit *beliebigen Zahlen*

$$\beta_5, \ldots, \beta_n;$$
$$\alpha_5, \ldots, \alpha_n.$$

Da kein Regulator außer R_0 existiert, verschwinden hierin mit den α, β auch die α', β'; daher können wir setzen

$$\alpha_i' = \sum_{k=5}^{n} g_{ik}\alpha_k + \sum_k g_{ik}^*\beta_k, \qquad \beta_i' = \sum_k h_{ik}^*\alpha_k + \sum_k h_{ik}\beta_k.$$

Die g, g^*, h, h^* sind konstante, von den α und β unabhängige Koeffizienten. Aus zwei derartigen Matrizen bilden wir

$$\mathsf{A}\bar{\mathsf{A}} = \begin{array}{|cc|}\hline \sum_i \beta_i\bar{\alpha}_i', & \sum_i \beta_i\bar{\beta}_i' \\ \sum_i \alpha_i\bar{\alpha}_i', & \sum_i \alpha_i\bar{\beta}_i' \\ \hline \end{array}\begin{matrix}3\\4\end{matrix}$$
$$\begin{matrix}1 & 2\end{matrix}$$

Die vier hier auftretenden Bilinearformen der beiden Variablenreihen α, β und $\bar{\alpha}$, $\bar{\beta}$ sind also Invarianten gegenüber linearer Transformation der Koordinaten $x_5 \ldots x_n$. Da $[\mathsf{A}\bar{\mathsf{A}}]$ in der Gruppe vorkommt und daher ein Multiplum von R_0 sein muß, bekommen wir drei Gleichungen, welche aussagen, daß

$$\sum_i \alpha_i\bar{\alpha}_i', \qquad \sum_i \beta_i\bar{\beta}_i' \quad \text{und} \quad \sum_i (\beta_i\bar{\alpha}_i' + \bar{\alpha}_i\beta_i')$$

symmetrische Bilinearformen sind. Die erste ergibt

$$g_{ik} = g_{ki}, \qquad g_{ik}^* = 0,$$

die zweite

$$h_{ik} = h_{ki}, \qquad h_{ik}^* = 0,$$

die dritte

(17)
$$g_{ik} + h_{ik} = 0.$$

Die quadratische Form

(18)
$$\sum_{ik} g_{ik}\alpha_i\alpha_k$$

ist nicht-ausgeartet. In der Tat: bezeichnet α_i ein Zahlsystem, für welches die sämtlichen

$$\alpha_i' = \sum_k g_{ik}\alpha_k$$

Null werden, so haben wir in der Gruppe die Matrix

$$M = \begin{array}{|cc|cc|c|c} \multicolumn{2}{c|}{\mu' \quad *} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 3 \\ \multicolumn{2}{c|}{\mu \quad *} & 0 & 0 & \alpha_5 \ldots \alpha_n & 4 \end{array}.$$

d nach (17) außerdem

$$L = \begin{array}{|cc|cc|c|c} \multicolumn{2}{c|}{* \quad \lambda} & 0 & 0 & \alpha_5 \ldots \alpha_n & 3 \\ \multicolumn{2}{c|}{* \quad \lambda'} & 0 & 0 & 0 \ldots 0 & 4 \end{array}$$

ann bilden aber

$$L + (\mu - \lambda')R_0, \quad M + (\lambda - \mu')R_0, \quad 0, \quad 0, \quad \alpha_5 R_0, \ldots, \alpha_n R_0$$

ne symmetrische Doppelmatrix, und daher ist $\alpha_5 = \ldots = \alpha_n = 0$. Bringen r (18) durch Transformation der Koordinaten $x_5 \ldots x_n$ auf die Normal-rm $\alpha_5^2 + \ldots + \alpha_n^2$, so wird in A allgemein

$$\alpha_i' = \alpha_i, \qquad \beta_i' = -\beta_i.$$

Ich nehme ein solches A her, in welchem die $\beta = 0$, die α aber be-big sind und setze es zusammen mit einer den Bedingungen (12) ge-genden Matrix A unserer Gruppe. Ich erhalte dadurch wieder eine atrix von der Form A, die mit $\bar{A}$ bezeichnet werde; und zwar haben ihr die Elemente folgende Werte:

$$\bar{\beta}_i = -a_{34}\alpha_i, \qquad \bar{\alpha}_i = \sum_k a_{ki}\alpha_k - a_{44}\alpha_i,$$

$$\bar{\beta}_i' = a_{12}\alpha_i, \qquad \bar{\alpha}_i' = a_{11}\alpha_i - \sum_k a_{ik}\alpha_k.$$

e Gleichungen $\bar{\alpha}_i' = \bar{\alpha}_i$, $\bar{\beta}_i' = -\bar{\beta}_i$ ergeben, über (14) hinausgehend, die ziehungen

$$a_{ik} + a_{ki} = (a_{11} + a_{44})\delta_{ik} \qquad (i, k = 5, \ldots, n);$$

besondere wird $(i = k)$:

$$a_{11} + a_{44} = 2c, \qquad a_{22} + a_{33} = 2c, \qquad a_{55} = \ldots = a_{nn} = c.$$

e Spur von A ist gleich nc, und darum muß $c = 0$,

$$a_{11} + a_{44} = a_{22} + a_{33} = 0$$

n. Infolgedessen ist von den fünf Bedingungen (15) die letzte eine lge der übrigen und der Gleichungen (12). Die Anzahl der unabhän-gen unter den Bedingungen (12), (15) ist darum nicht, wie es sein ßte, $= 2n - 3$, sondern höchstes $= 2n - 4$. Dieser Widerspruch be-ist unsere Behauptung.

Wir sind also jetzt im Besitze eines A' — siehe Gl. (10) —, in lchem $a = 1$ ist. Durch eine einfache Transformation der Koordinaten, lche R_0 ungeändert läßt, geben wir ihm die Gestalt

$$A_1 = \begin{array}{|cc|c|}\hline 1 & 0 & \\ 0 & 1 & \\ \hline & & -1\ 0 \\ & & 0\ -1 \\ \hline \end{array} .$$

	1	2	3	4
1	0		$+2$	$+1$
2				
3	-2		0	-1
4				
	-1		$+1$	0

Die Tabelle rechts gibt die zugehörige Ländereinteilung mit ihren Multiplikatoren an.

Eine Matrix A, in welcher $a \neq 0$ ist und darum $= 1$ genommen werden kann, liefert als selbständigen, zum Lande $+2$ gehörigen Bestandteil:

$$R_0^* = \begin{array}{|cc|}\hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \end{array} \begin{matrix} 1 \\ 2 \end{matrix}$$
$$\begin{matrix} 3 & 4 \end{matrix}$$

Die Gleichungen (14) gelten allgemein für jede Gruppenmatrix A und sind nicht an die Bedingungen (12) gebunden; denn die einen betreffen die Elemente des Landes $+1$, die andern die des Landes 0. Aus einer zum Lande $+1$ gehörigen Matrix A wie die nebenstehende, Gl. (21), erhält man durch „Umsetzung" mittels R_0 eine zum Lande -1 gehörige Matrix A', Gl. (22); ebenso aber aus einer beliebigen zum Lande -1 gehörigen Matrix A' durch Umsetzung mittels R_0^* die zum Lande $+1$ gehörige Matrix A.

(21) $A =$

		$\beta_5 \ldots \beta_n$
		$\alpha_5 \ldots \alpha_n$
	$\alpha_5' \ \beta_5'$	
	$\vdots \ \vdots$	
	$\alpha_n' \ \beta_n'$	

(22) $A' =$

		$-\beta_5 \ldots -\beta_n$
		$-\alpha_5 \ldots -\alpha_n$
$\alpha_5' \ \beta_5'$		
$\vdots \ \vdots$		
$\alpha_n' \ \beta_n'$		

Es sei $m \leqq 2(n-4)$ die Anzahl der linear unabhängigen zum Lande -1 gehörigen Matrizen. Für die allgemeine Matrix A der Gruppe besteht dann die Forderung, daß die Länder $+1$ und -1 leer sind, aus $2m$ unabhängigen Bedingungen. Die Entleerung der Länder $+2$ und -2 wird durch zwei weitere Bedingungen hervorgerufen; und zufolge (14) genügen jetzt endlich die fünf Bedingungen (15), um in A die Auslöschung der ersten vier Zeilen und Kolonnen zu vollenden. Die Anzahl der dazu erforderlichen Bedingungen ist also höchstens $2m + 7 \leqq 4n - 9$. Andererseits sind dazu aber nach dem Prinzip II

ndestens $4n - 10$ unabhängige Bedingungen erforderlich. Folglich ist $= 2(n-4)$; und wir haben in der Gruppe Matrizen (21) und (22) *beliebigen Zahlen* $\alpha_5 \ldots \alpha_n$, $\beta_5 \ldots \beta_n$. Jetzt erkennen wir wie oben, 3 bei geeigneter Normierung der Koordinaten $x_5 \ldots x_n$

$$\alpha_i' = \alpha_i, \quad \beta_i' = -\beta_i$$

; und dann erhalten wir wie dort

$$a_{11} + a_{44} = a_{22} + a_{33} = 0,$$

$$a_{ik} + a_{ki} = 0 \quad \text{(für } i, k \geqq 5\text{)},$$

ne an die ein anderes Land betreffenden Bedingungen (12) gebunden sein. Die allgemeine Matrix unserer Gruppe aber erhält die Form

ϱ	c	a	0	$\beta_5 \ldots \beta_n$
d	σ	0	a	$\alpha_5 \ldots \alpha_n$
b	0	$-\sigma$	c	$\delta_5 \ldots \delta_n$
0	b	d	$-\varrho$	$\gamma_5 \ldots \gamma_n$
$-\gamma_5$	δ_5	α_5	$-\beta_5$	
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$*$
$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	$\cdot$	
$-\gamma_n$	δ_n	α_n	$-\beta_n$	

(der nicht ausgefüllte Teil ist schiefsymmetrisch),

welche die richtige Parameterzahl enthält. *Das ist die Gruppe der infinitesimalen Transformationen, welche die quadratische Form*

$$2(x_1 x_4 - x_2 x_3) + (x_5^2 + \ldots + x_n^2)$$

invariant lassen.

Es fehlt noch der Nachweis, daß R_0 der einzige Regulator ist. Ich behaupte zunächst: wenn in n Regulator R, Gl. (11), die beiden Spalten von der 5. Stelle ab

$$\alpha_5 \ldots \alpha_n \quad \text{und} \quad \beta_5 \ldots \beta_n$$

einander proportional sind, so ist R ein Multiplum von R_0. Dadurch, 3 ich $x_1 x_2$ einer geeigneten linearen Transformation unterwerfe und ichzeitig $x_3 x_4$ derselben linearen Transformation (wobei die Normalform n R_0 nicht geändert wird), kann ich in einem solchen R erzielen, daß Reihe $\beta_5 \ldots \beta_n$ verschwindet. Die Matrizenreihe

$$R - \beta_4 R_0, \quad \beta_3 R_0, \quad 0, \ldots, 0$$

dann eine symmetrische Doppelmatrix; also, wie behauptet, $R = \beta_4 R_0$. – somit R ein von R_0 unabhängiger Regulator, so können wir ihm durch eine geeignete Transformation der Koordinaten $x_5 \ldots x_n$ die Form erteilen:

α_3	β_3	
α_4	β_4	
1	0	5
0	1	6
1	2	

oder endlich, indem man an Stelle von x_3, x_4 als neue Koordinaten

$$x_3 - \alpha_3 x_5 - \beta_3 x_6, \qquad x_4 - \alpha_4 x_5 - \beta_4 x_6$$

einführt, noch einfacher:

$$R = \begin{array}{|cc|} \hline 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ \hline \end{array}\begin{matrix} 5 \\ 6 \end{matrix}$$

$$\begin{matrix} 1 & 2 \end{matrix}$$

So fortfahrend, erkennen wir, daß sich jeder Regulator (nach geeigneter Wahl des Koordinatensystems) aus ν unabhängigen additiv zusammensetzen läßt, welche so aussehen:

$$R_0 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\ {}^{3}_{4}, \quad R_1 = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\ {}^{5}_{6}, \quad \ldots, \quad R_{\nu-1} = \begin{matrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{matrix}\ {}^{2\nu+1}_{2\nu+2}.$$

Darum haben nach (9) die ersten beiden Zeilen jeder Gruppenmatrix A die Form

$*$	$*$	a	0	a_1	0	$\ldots$	$a_{\nu-1}$	0	
$*$	$*$	0	a	0	a_1	$\ldots$	0	$a_{\nu-1}$	$*$
1	2	3	4	5	6		$2\nu+1$	$2\nu+2$	

Ihr Verschwinden involviert also höchstens $2n - 3\nu$ unabhängige Bedingungen. Wenn aber diese beiden ersten Zeilen Null sind, so zeigt A', daß die dritte und vierte Spalte von A einen Regulator bilden müssen. Es genügen also höchstens ν weitere Bedingungen, um auch diese auszulöschen. Durch höchstens $2n - 2\nu$ unabhängige Bedingungen sind demnach zwei Zeilen und zwei Kolonnen zum Verschwinden gebracht worden, und deshalb muß nach II: $2\nu \leqq 3$, $\nu = 1$ sein.

§ 6.

Der Typus $1 + 1 + \ldots + 1$.

$$R_0 = \begin{matrix} 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 \end{matrix}\ {}^{h+1}_{h+2}\ \ldots\ {}^{\ }_{2h}$$
$$1 \quad 2 \quad \ldots \quad h$$

Wenn wir annehmen dürfen, daß R_0 der einzige Regulator ist, d. h. die einzige Gruppenmatrix von der Form (23),

(23)

Kopf	α'_{h+1}	$\alpha^{(h)}_{h+1}$	$h+1$
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	$\ldots$	$\ldots$	$2h$
Schwanz	$\ldots$	$\ldots$	$2h+1$
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	α'_k	$\alpha^{(h)}_k$	k
	$\ldots$	$\ldots$	$\ldots$
	α'_n	$\alpha^{(h)}_n$	n
	1	$\ldots$ h	

so erweist sich dieser Fall sehr rasch als unmöglich. Denn wir erkennen sofort wie in § 5, daß in der allgemeinen Gruppenmatrix A das Quadrat, in welchem sich die ersten h Zeilen mit der $(h+1)$-ten bis $(2h)$-ten Kolonne durchkreuzen, ein Multiplum der h-dimensionalen Einheitsmatrix sein muß. Die Zahl der Bedingungen, welche in A die ersten h Zeilen zum Verschwinden bringen, ist daher höchstens $= hn - (h^2 - 1)$. In einer Matrix A aber, in welcher die ersten h Zeilen fehlen, bilden die $(h+1)$-te bis $(2h)$-te Kolonne einen

gulator $A' = [R_0 A]$. Es genügt also *eine* weitere Gleichung, um auch auszulöschen. Daher nach II:

4) $$h^2 - 2 \leqq \frac{h(h+1)}{2}, \qquad \frac{h(h-1)}{2} \leqq 2, \qquad h \leqq 2.$$

An einem Regulator unterscheiden wir, wie aus dem Schema ersichtlich, „Kopf" und „Schwanz". Auf keinen Fall kann es außer R_0 noch einen schwanzlosen Regulator geben, wenn nicht die Reduktion unseres Typus auf den entsprechenden mit einem niedrigeren h eintreten soll. Denn zu einem solchen Regulator könnte man, indem man die Variablen $x_1 x_2 \dots x_h$ durch eine geeigneten linearen Transformation und die Variablen $x_{h+1} \dots x_{2h}$ der gleichen Transformation unterwirft (dabei wird die Normalform von R_0 nicht gestört), die Form geben:

$$= \begin{array}{|cccc|l} \hline \omega & * & \dots & * & h+1 \\ 0 & * & \dots & * & h+2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \vdots \\ 0 & * & \dots & * & 2h \\ \hline \multicolumn{4}{c}{1\ 2\ \dots\ h} & \end{array}$$

und mit der Herstellung von $\bar{R}_0 - \omega R_0$ wäre die Reduktion gelungen. Wenn wir also außer R_0 noch $\nu - 1$ unabhängige Regulatoren haben, $R_1, \dots, R_{\nu-1}$, so sind deren Schwänze voneinander unabhängig. Das ist aber, wie wir jetzt sehen werden, wiederum nur möglich, wenn $h = 2$ ist.

Wir betrachten das Rechteck $A_{(h)}$ der h ersten Zeilen einer willkürlichen Gruppenmatrix A. Weil R_0 der einzige schwanzlose Regulator ist, schließen wir zunächst wieder aus A'', daß in demjenigen Teil jenes Rechtecks, der sich von der $(h+1)$-ten bis zur $(2h)$-ten Spalte erstreckt, ein Multiplum der h-dimensionalen Einheitsmatrix steht. Durch höchstens n Bedingung bewirken wir die Entleerung dieses Quadrats. Für ein solches A bilden wir $A' = [R_0 A]$ und darauf mit einem willkürlichen Regulator R, Schema (23), $\bar{A} = [RA']$. Die Rechnung zeigt, daß $\bar{A}$ der folgende schwanzlose Regulator ist:

$$\begin{array}{|c|} \hline (a\alpha)'_1 \dots (a\alpha)^{(h)}_1 \\ \dots\dots\dots \\ \dots\dots\dots \\ (a\alpha)'_h \dots (a\alpha)^{(h)}_h \\ \hline 1 \quad \dots \quad h \end{array}$$

mit

$$(a\alpha)^{(k)}_i = \sum_r a_{ir} \alpha^{(k)}_r;$$

daher ist die hingeschriebene Matrix ein Multiplum der h-dimensionalen Einheitsmatrix:

5) $$(a\alpha)^{(k)}_i = \lambda \cdot \delta^k_i.$$

In dem Ausdruck $(a\alpha)^k_i$ braucht der Summationsindex r erst von $h+1$ ab zu laufen. Das Verschwinden der ersten h Zeilen von A kann also durch höchstens $hn - (h^2 - 1) - \mathsf{N}$ Bedingungen bewirkt werden, wo N die Anzahl der unter den Gleichungen (25) enthaltenen unabhängigen beträgt, wenn wir darin R die Regulatoren $R_1, \dots, R_{\nu-1}$ durchlaufen lassen. N ist

aber mindestens[2]) gleich $\nu - 1$; denn $\nu - 1$ unabhängige Bedingungen für die $n - 2h$ letzten Spalten von $A_{(h)}$ erhalten wir gewiß, wenn wir jedem dieser Regulatoren die eine Beziehung

$$(a\alpha)_1^{(2)} + (a\alpha)_2^{(3)} + \ldots + (a\alpha)_h^{\prime} = 0$$

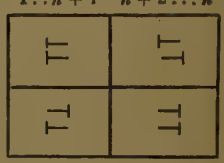
entsprechen lassen, weil ja die $\nu - 1$ Schwänze jener Regulatoren voneinander unabhängig sind. In denjenigen Gruppenmatrizen, deren erste h Zeilen leer sind, bilden die $(h+1)$-te bis $(2h)$-te Kolonne einen Regulator; es genügen also höchstens ν Bedingungen, um auch diese h Kolonnen auszulöschen. Gegenüber dem zu Anfang des Paragraphen betrachteten Fall, wo R_0 der einzige Regulator war, ersparen wir demnach mindestens $(\nu - 1)$ Bedingungen, um das Verschwinden der ersten h Zeilen zu bewirken; hingegen haben wir höchstens $(\nu - 1)$ Bedingungen mehr nötig, um jene h Kolonnen zu entleeren. Das kompensiert sich.

§ 7.

Typus h.

$$R_0 = \begin{array}{c|c} \begin{matrix} 0\,1\,0\ldots 0 \\ 0\,0\,1\ldots 0 \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ 0\,0\,0\ldots 1 \\ 0\,0\,0\ldots 0 \end{matrix} & \begin{matrix} 1 \\ 2 \\ \vdots \\ h \\ h+1 \end{matrix} \\ \hline 1\;\;2\;\;3\ldots h{+}1 & \end{array}.$$

Wie die Reihe des Indizes in die beiden Abschnitte: $\vdash$ von 1 bis $h+1$ und $\dashv$ von $h+2$ bis n zerfällt, so zerlegt sich das Schema einer Matrix in die vier Felder



Wir betrachten die Wirkung der Ableitung $A' = [R_0 A]$ auf eine beliebige Matrix A. Sie entleert das Feld $\sqsupset\!\!\dashv$; im Felde $\vdash\!\!\dashv$ bewirkt sie ein Emporsteigen der Zahlenzeilen im Schema um eine Stelle, wobei die erste Zahlzeile verloren geht und die letzte Zeile im Schema leer wird; im Felde $\vdash\!\!\vdash$ ein Hinüberrücken der Zahlenspalten nach rechts um eine Stelle unter Wechsel des Vorzeichens, wobei die letzte verloren geht und die erste Spalte des Schemas leer wird. Das Feld $\sqsupset\!\!\vdash$ betrachten wir gesondert und denken es uns nach links und unten durch Nullen ergänzt, so daß es einen ganzen Quadranten ausfüllt. Die Wirkung der Operation ist dann die, daß aus jeder der in der Figur angedeuteten diagonalen Zahlenreihen die Reihe der Differenzen hervorgeht und in die nächstfolgende Diagonale des Sche-

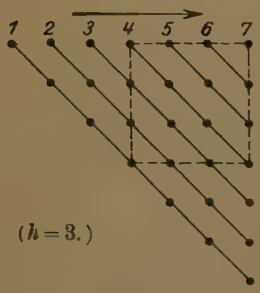


Fig. 1.

[2]) und höchstens $= (h^2 - 1)(\nu - 1)$. Die Überlegungen am Schluß von § 5 zeigen, daß für $h = 2$ diese Maximalzahl erreicht wird. Hier genügt uns ein viel weniger weitgehendes Resultat.

nas hineinrückt (die Numerierung und Reihenfolge der Diagonalen ist aus ler Figur zu ersehen). Aus dieser Beschreibung geht hervor: nach $(h+1)$-naliger Ableitung sind die Felder $\sqsubset$ und $\sqsupset$, nach $(2h+1)$-maliger ist auch das Quadrat $\sqsubset$ leer geworden. Wir setzen nun von vornherein alle Zeilen des Feldes $\sqsubset$ bis auf die erste $=0$; das sind höchstens $n-h-1$ unabhängige Bedingungen. Dann fehlen in den Ableitungen $A', A'', \ldots$ die $(h+2)$-te bis n-te Kolonne.

Ist B eine Matrix, in welcher alle Spalten außer den $h+1$ ersten Null sind, und verschwindet deren Ableitung B', so sind im Felde $\sqsubset$ von B nur die $h+1$ letzten Diagonalen besetzt, und zwar jede einzelne Diagonale mit lauter gleichen Zahlen; im Felde $\sqsupset$ stehen nur in der letzten Spalte keine Nullen. Sind im Felde $\sqsubset$ von B auch noch die Hauptdiagonale und die nächstfolgende leer, so ist B eine Matrix mit lauter charakteristischen Wurzeln 0, von geringerem Range als h; wenn Reduktion unmöglich sein soll, dürfen wir daraus schließen, daß B verschwindet. *Diese Schlußweise wenden wir an, indem wir die Reihe der Ableitungen $A', A'', \ldots$ rückwärts durchlaufen.* Wir achten fortan nur auf das Quadrat $\sqsubset$ von A.

$A^{2h)}$ besteht aus dem einzigen, in der rechten oberen Ecke des Feldes $\sqsubset$ stehenden Element

$$(-1)^h \frac{(2h)!}{h!\,h!}\, a_{h+1,1}$$

Daraus folgt $a_{h+1,1}=0$. Infolgedessen tritt nun auch in $A^{(2h-1)}$ als einziges Element die rechte obere Ecke auf; dies Element muß demnach gleichfalls verschwinden. Das liefert eine lineare Relation zwischen den beiden Elementen in der 2. Diagonale von A. So fortschreitend erhalten wir die folgende Tabelle.

$2h$	$1\|1.$ $\rightarrow$	$\}1$
$2h-1$	$-,\ 1\|2.$ $\rightarrow$	
$2h-2$	$-,\ 2\|2,\ 1\|3.$ $\rightarrow$	$\}2$
$2h-3$	$-\ \ -\ \ 2\|3,\ 1\|4$ $\rightarrow$	
..	. . . . .	..
..	. . . . .	..
4	$-\ \ -\ \ \ldots\ldots\ -, h-1\|h-1, h-2\|h, h-3\|h+1, \ldots\rightarrow$	$\}h-1$
3	$-\ \ -\ \ \ldots\ldots\ -,\ \ -\ \ , h-1\|h, h-2\|h+1, \ldots\rightarrow$	
2	$-\ \ -\ \ \ldots\ldots\ -,\ \ -\ \ ,\ \ h\|h, h-1\|h+1, \ldots\rightarrow$	$\}h$
1	$-\ \ -\ \ \ldots\ldots\ -,\ \ -\ \ ,\ \ -\ ,\ \ h\|h+1, \ldots\rightarrow$	

In ihr ist angegeben: 1) die Nummer der Iterierten; 2) wie viele Bedingungen ihr Verschwinden für die durch ihre Nummern gekennzeichneten Diagonalen von A liefert; z. B. 2 3 bedeutet: 2 Bedingungen für

die 3. Diagonale; 3) die Anzahl der Diagonalen, aus denen die Iterierte selber besteht. Dabei ist jedesmal, wenn für die i-te Diagonale von A i Bedingungen auftreten, ohne weiteres auf das Verschwinden dieser Diagonale geschlossen; wir wollen das hernach ausdrücklich rechtfertigen. Die beiden letzten Schritte erfordern zwei Zusatzbedingungen. In A'' ist die auf die Hauptdiagonale (des Feldes $\sqsubset$) folgende Diagonale mit h gleichen Zahlen

$$a'' = a_{32} - 2a_{21}$$

besetzt. Wir müssen ausdrücklich fordern, daß a'', das an der Stelle $(1,2)$ auftretende Element von A'', verschwindet, um schließen zu dürfen, daß $A'' = 0$ ist. Damit haben wir dann h Bedingungen für die h-te Diagonale von A gewonnen; diese Diagonale ist also $= 0$, und infolgedessen sind in A' nicht bloß die Diagonalen links von der Hauptdiagonale leer, sondern auch noch diese selbst. Wiederum aber müssen wir ausdrücklich fordern, daß die h gleichen Zahlen

$$a' = a_{22} - a_{11},$$

welche in A' die auf die Hauptdiagonale folgende erfüllen, Null sind, um $A' = 0$ zu erhalten.

Die Rechtfertigung dafür aber, daß aus dem Auftreten von i Bedingungen für die i-te Diagonale von A auf ihr Verschwinden geschlossen werden kann, liegt in der folgenden Bemerkung: Wenn die l-te Differenz einer Zahlenreihe (a) verschwindet, wird ihr allgemeines Glied dargestellt durch ein Polynom des laufenden Index vom $(l-1)$-ten Grad; treten in ihr l Nullen auf, so muß die ganze Reihe (a) verschwinden.

Die bisher angesetzten Bedingungen für die allgemeine Gruppenmatrix A haben zur Folge: daß im Felde $\sqsubset$ nur die erste Zeile, im Felde $\sqsupset$ nur die letzte Spalte auftritt, das Quadrat $\sqsubset$ aber auf jeder einzelnen Diagonale eine Reihe gleicher Zahlen trägt, auf den Diagonalen links von der Hauptdiagonale insbesondere lauter Nullen. Setzen wir also noch die letzte Spalte dieses Quadrats mit Ausnahme ihres ersten Elements $= 0$ — das sind weitere h Bedingungen —, so haben wir durch höchstens

$$h(n-h-1)+2+h = hn - h^2 + 2$$

unabhängige Bedingungen erreicht, daß die ersten h Spalten von A und die 2-te bis $(h+1)$-te Zeile verschwinden. Infolgedessen muß

$$(24) \qquad h^2 - 2 \leqq \frac{h(h+1)}{2}, \qquad \frac{h(h+1)}{2} \leqq 2, \qquad h \leqq 2$$

sein.

Die resultierenden Anzahlen sind, wie man sieht, hier genau die gleichen, wie in dem extrem entgegengesetzten, in § 6 behandelten Fall. Auch die

Bedingungen, welche das Verschwinden von h Zeilen und Kolonnen zur Folge haben, sind analog. Den Elementarteilern, aus welchen hier R_0 besteht, korrespondiert die Einteilung der Indexreihe in die folgenden Abschnitte

$$1\,2 \ldots h+1 \,|\, h+2 \,|\, h+3 \,|\, \ldots \,|\, n.$$

Wir postulieren, daß diejenigen Stellen (ik) der Matrix leer sind, für welche k die Schlußnummer, i nicht die Anfangsnummer eines Abschnitts ist. Dazu kommen zwei Nebenbedingungen: das Verschwinden des an der Stelle $(1\,2)$ stehenden Elements in A' und A''. Die den Elementarteilern korrespondierende Einteilung der Indexreihe im Falle des vorigen Paragraphen war die folgende:

$$h+1, 1 \,|\, h+2, 2 \,|\, \ldots \,|\, 2h, h \,\|\, 2h+1 \,|\, \ldots \,|\, n-1 \,|\, n.$$

Wenn nur ein einziger Regulator existiert, sind die damals postulierten Bedingungen genau so zu beschreiben wie hier; auch damals traten zwei Zusatzbedingungen auf, besagend, daß das an der Stelle $(h+1, 1)$ [oder der Stelle $(h+2, 2) \ldots$ oder der Stelle $(2h, h)$] befindliche Element von A' und A'' Null wird. Wir dürfen danach erwarten, daß sich die ganze Überlegung auf den allgemeinen Fall übertragen läßt; das ist unsere nächste Aufgabe.

§ 8

Beliebiger Typus.

R_0 sei vom Typus $\mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_e$. Die Indexreihe zerfällt in die Abschnitte von der Länge

$$\mu_1 + 1,\ \mu_2 + 1,\ \ldots,\ \mu_e + 1,\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1.$$

Das Schema einer beliebigen Matrix zerfällt in rechteckige Felder, wobei zu einem und demselben Feld alle Stellen (ik) gehören, deren i und k je einem bestimmten Abschnitt der Indexreihe angehören. Bei der Ableitung, die A in $A' = [R_0 A]$ verwandelt, sind die Schicksale der einzelnen Rechtecke voneinander unabhängig. Ergänzen wir ein beliebiges von ihnen durch links und unten angefügte Nullen zu einem Quadranten, so besteht der Vorgang einfach darin, daß jede Diagonalreihe unter Differenzbildung um einen Schritt nach rechts rückt. Besteht ein solches Rechteck aus $\mu + 1$ Spalten und $\nu + 1$ Zeilen und ist λ die kleinere der beiden Zahlen μ, ν, so be-

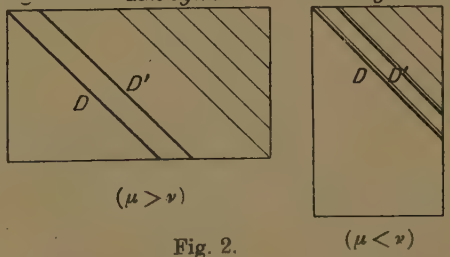


Fig. 2.

zeichnen wir die letzten $\lambda + 1$ Diagonalen als die Eckdiagonalen. In einer Matrix B, deren Ableitung verschwindet, sind in jedem Rechteck nur die Eckdiagonalen besetzt, jede einzelne derselben aber mit lauter gleichen Zahlen. Wir wollen B einen Regulator nennen, wenn außerdem in jedem Rechteck die durch die linke obere Ecke gehende Diagonale D leer ist (für die „gestreckten" Rechtecke, $\mu > \nu$, ist das selbstverständlich). Ein solcher Regulator R ist gewiß eine Matrix, deren sämtliche charakteristische Wurzeln 0 sind; davon überzeugt man sich am leichtesten, wenn man eine andere Anordnung der Indizes vornimmt, indem man mit den Anfangsziffern der Abschnitte in ihrer natürlichen Reihenfolge beginnt, darauf die in den Abschnitten an 2. Stelle stehenden Ziffern folgen läßt, usf. Der Rang von R ist höchstens

$$= h = \mu_1 + \mu_2 + \ldots + \mu_e;$$

denn in R sind die $n - h$ Spalten leer, welche mit den Anfangsziffern der Abschnitte numeriert sind. Der Rang ist sogar $< h$, wenn in einer, etwa der ersten Spalte von Rechtecken, jedes Rechteck auch noch in der auf D folgenden Diagonale D' Nullen trägt. *Soll keine Reduktion eintreten, so dürfen wir annehmen, daß ein Regulator dieser Art stets verschwindet;* das ist das Prinzip unseres Schlusses.

Wir betrachten diejenigen Gruppenmatrizen A, welche den am Schluß der vorigen Paragraphen formulierten Bedingungen genügen: alle Stellen (ik) sollen leer sein, für welche k die Schlußziffer und i nicht die Anfangsziffer eines Abschnittes ist. Das sind offenbar $h(n-h)$ Bedingungen. An der Reihe der Ableitungen A', A'', ... einer solchen Matrix rückwärts mit Hilfe des eben angegebenen Prinzips entlang schließend, erkennen wir sukzessive deren Verschwinden. Diese Überlegung, bei der man jedes Rechteck für sich betrachten kann, dürfen wir wohl dem Leser überlassen, da sie genau nach dem Muster der im vorigen Paragraphen durchgeführten verläuft. Man unterscheide dabei die Fälle $\mu > \nu$ und $\mu < \nu$. Für $\mu < \nu$ ist zu beachten, daß die letzte Spalte des Rechtecks so aussieht, wie die nebenstehende Figur zeigt. Nur bei den beiden letzten Schritten sind Zusatzbedingungen erforderlich. Nehmen wir zunächst an, daß R_0 der einzige Regulator ist, so genügt, sintemal A'' sich als ein Regulator ergibt, *eine* Zusatzbedingung, um A'' zum Verschwinden zu bringen. Darauf erweist sich auch A' als ein Regulator, und eine zweite Zusatzbedingung macht A' zu Null. Mithin fehlen zufolge von höchstens $h(n-h)+2$ Bedingungen h Zeilen in A (nämlich diejenigen, deren Index keine Anfangsziffer eines Abschnitts ist) und h Kolonnen (nämlich diejenigen, deren Index keine Schlußziffer eines Abschnitts ist). Daraus dieselben Ungleichungen wie früher.

*
0
0
⋮
0

Leider können wir allgemein so nicht schließen, sondern wir dürfen uns nur darauf stützen, daß ein Regulator verschwindet, wenn in jedem der in der ersten Spalte stehenden Rechtecke auch noch die Diagonale D' leer ist. Die Ordnungen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_e$ denken wir uns nach absteigender Größe geordnet. Die größte unter ihnen ist also $\mu_1 = \mu$; und zwar seien die ersten e_0 Ordnungszahlen $= \mu$, die nächsten e_1 aber $= \mu - 1$. Was die Rechtecke der ersten Spalte von A'' betrifft, so ist es nur für die ersten e_0 derselben (welche Quadrate von der Seitenlänge $\mu + 1$ sind) zweifelhaft, ob ihre Diagonalen D' leer sind; es genügen also höchstens e_0 Bedingungen, um A'' zum Verschwinden zu bringen. Darauf erweist sich A' als ein Regulator. In welchen Rechtecken der ersten Spalte eines Regulators kann überhaupt die Diagonale D' von einer andern Zahl als 0 besetzt sein? Nur in den $e_0 + e_1$ ersten. Es genügen daher höchstens $e_0 + e_1$ weitere Bedingungen, um die Gleichung $A' = 0$ zu erzwingen. Die Zahl der erforderlichen Zusatzbedingungen beträgt demnach höchstens $2e_0 + e_1$, und statt der Ungleichung

$$\frac{h(h-1)}{2} \leqq 2 \quad \text{bekommen wir} \quad \frac{h(h-1)}{2} \leqq 2e_0 + e_1.$$

Ist $\mu \geqq 2$, so ist h mindestens $= 2e_0 + e_1$, und es sind daher mit dieser Ungleichung *nur die beiden Typen* 2 *und* $2 + 1$ *verträglich*. Der erste ist in § 4 behandelt, den zweiten werden wir im nächsten Paragraphen ausschließen. Der Fall $\mu = 1$ wurde in § 6 behandelt; hier war es unbedingt erforderlich, genauer auf die Beziehungen einzugehen, welche sich für eine beliebige Gruppenmatrix aus der Existenz weiterer Regulatoren neben R_0 ergeben.

§ 9.

Ausschließung des letzten Spezialfalls $2 + 1$.

$$R_0 = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Aus A'''' und A''' ergeben sich für jede Gruppenmatrix $A = (a_{ik})$ die Gleichungen:

$$a_{31} = 0, \; a_{51} = 0, \; a_{34} = 0; \; a_{32} = a_{21} (= a).$$

Daher lautet A'':

$0,\ -a,\ (a_{33}-a_{22})-(a_{22}-a_{11})$			$0,\ a_{35}-2a_{24}$	$a_{36}\ \dots\ a_{3n}$
$0,\ 0,$		$-a$	$0,\ 0$	
$0,\ 0,$		0	$0,\ 0$	
$0,\ 0,$	$-2a_{32}+a_{41}$		$0,\ -2a_{54}$	
$0,\ 0,$	0		$0,\ 0$	

$$\begin{matrix} a_{31} \\ \vdots \\ a_{n1} \end{matrix}$$

Addiert man aR_0, so sieht man, daß aus

(26) $$a_{36} = \dots = a_{3n} = 0$$

(wenn wir nicht auf den Fall § 5 zurückkommen wollen) folgt:

(27) $$a_{61} = \dots = a_{n1} = 0,$$

(28) $$a_{33} - a_{22} = a_{22} - a_{11} (= b),$$

(29) $$a_{32} = a_{21} = 2a_{54} (= a),$$

(30) $$a_{35} = 2a_{24}, \quad 2a_{52} = a_{41}.$$

Da in der Ungleichung

$$\frac{h(h-1)}{2} \leqq 2e_0 + e_1$$

des vorigen Paragraphen im gegenwärtigen Fall das Gleichheitszeichen gilt, müssen die dort eingeführten

$$h(n-h) + 2e_0 + e_1 = 3(n-3) + 3$$

Bedingungen voneinander unabhängig sein, weil sonst der zu vermeidende Widerspruch eintritt, daß durch weniger Bedingungen 3 Zeilen und 3 Kolonnen in der Gruppenmatrix zum Verschwinden gebracht werden. Das heißt, daß aus den Bedingungen (26), auch wenn wir ihnen die weiteren hinzufügen

$$a_{26} = \dots = a_{2n} = 0, \quad a_{56} = \dots = a_{5n} = 0, \quad a_{35} = 0, \quad a_{52} - a_{41} = 0$$

die Gleichung $a = 0$ nicht folgen darf. Ein den angegebenen Bedingungen genügendes A, für welches $a = 1$ ist, liefert aber ein A', das folgendermaßen aussieht:

2	0	*	0	*
0	0	0	0	0
0	0	−2	0	0
0	0	*	1	0
0	0	0	0	−1

$$\begin{matrix} * & * \\ \vdots & \vdots \\ * & * \end{matrix}$$

Daraus läßt sich durch eine R_0 nicht ändernde Koordinatentransformation die Matrix A_1 herstellen, welche außerhalb der Hauptdiagonale leer, in der Hauptdiagonale aber mit den Zahlen

$$2,\ 0,\ -2,\ 1,\ -1,\ 0,\ \dots,\ 0$$

besetzt ist. Zu ihr gehört eine Ländereinteilung mit den folgenden Multiplikatoren:

Die nur aus *einem* oder zwei Feldern bestehenden Länder 4, -4, 3, -3 müssen leer sein, wenn nicht Reduktion auf den Typus $1+1$ eintreten soll; sie sind in dem Schema schraffiert.

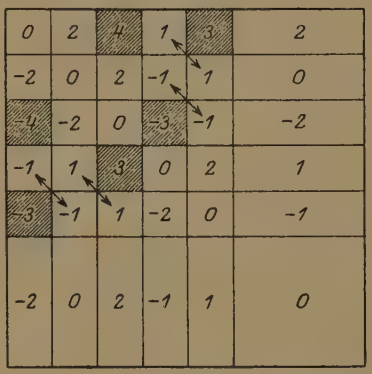


Fig. 3.

Der dem Lande -2 angehörige Bestandteil einer Gruppenmatrix A, in welcher $a \neq 0$ ist, liefert ferner das nebenstehende R_0^*.

$$R_0^* = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

Die Gleichungen (28) und (30) gelten absolut, unabhängig von den einem andern Lande angehörigen Bedingungen (26). R_0^* ergibt, wenn es in derselben Weise wie R_0 verwendet wird, die entsprechenden Beziehungen

$$a_{53} = a_{42}, \quad a_{14} = a_{25}. \tag{30*}$$

Die allgemein gültigen Gleichungen (30) und (30*) sind in dem Multiplikatorenschema durch die Verbindungsstriche der betreffenden Felder angedeutet.

Aus dem Schema lesen wir ohne weiteres ab: die $n-4$ Bedingungen

$$a_{16} = \ldots = a_{1n} = 0; \quad a_{12} = 0$$

haben, wenn nicht Reduktion auf $h = 2$ eintreten soll, die Entleerung des Landes 2 zur Folge, da sie von ihm nur zwei Kolonnen übriglassen. Ebenso genügen je $n-4$ Bedingungen zur Entleerung der Länder -2, 1, -1 (um das zu erkennen, beachte man, daß zwei „verbundene" Felder durch eine einzige Bedingung entleert werden können). Endlich liefert eine zum Lande 0 gehörige Matrix A durch Ableitung eine zum Lande 2 gehörige Matrix A', aus der man abliest: zufolge der $n-4$ Gleichungen

$$a_{26} = \ldots = a_{2n} = 0, \quad a_{44} - a_{55} = 0$$

wird

$$a_{62} = \ldots = a_{n2} = 0 \quad \text{und} \quad a_{11} = a_{22} = a_{33}, \quad a_{44} = a_{55}.$$

Sorgen wir endlich noch durch zwei weitere Bedingungen dafür, daß

$$a_{11} = a_{22} = a_{33} \quad \text{und} \quad a_{44} = a_{55}$$

verschwinden, so haben wir in A durch höchstens $5(n-4)+2 = 5n-18$ Bedingungen 5 Zeilen und Spalten ausgelöscht, während dazu nach dem Prinzip II wenigstens $5n-15$ unabhängige Gleichungen erforderlich sein sollten.

Damit ist der Beweis beendet. Während mir die Gedankenverkettung zur Erledigung der beiden Hauptfälle in §§ 4 und 5 den Eindruck des Naturgemäßen macht, ist der zweite Teil, die Reduktion auf die beiden Hauptfälle, ziemlich unerfreulich. Es kommt hinzu, daß er den Forderungen der „Kontinuums-Analysis", welche Brouwer und ich neuerdings zu entwickeln begonnen haben[8]), nicht ohne wesentliche Ergänzungen Genüge leistet; in der vorliegenden Form ist er nur zwingend, wenn wir uns in einem Zahlbereich bewegen wie z. B. dem der rationalen Zahlen, in welchem eine Zahl entweder $= 0$ oder $\neq 0$ ist. Die Fallunterscheidungen der Elementarteilertheorie sind von diesem Standpunkt aus ein besonders bedenklicher Ausgangspunkt. Darauf wird aber erst zurückzukommen sein, wenn einmal jene neue Analysis in bestimmterer Ausgestaltung vorliegt, als es heute der Fall ist.

---

[8]) Vgl. Weyl, Über die neue Grundlagenkrise der Mathematik, Math. Zeitschrift **10** (1921), S. 39—79.

(Eingegangen am 24. April 1921.)

Ein Mittelwertsatz in der Primzahltheorie.

Von

Harald Cramér in Stockholm.

Die Riemannsche Vermutung wird in den drei ersten Nummern von dieser Arbeit als wahr angenommen.

1. Es sei $x > 2$, und es bezeichne $\psi(x)$ die bekannte Tschebyscheffsche Primzahlfunktion

$$\psi(x) = \sum_{p^m \leq x} \log p,$$

wo p die Primzahlen, m die ganzen Zahlen durchläuft. Dann gilt nach v. Koch [1])

$$\psi(x) = x + O(\sqrt{x} \log^2 x);$$

nach Littlewood [2]) gilt aber *nicht*

$$\psi(x) = x + o(\sqrt{x} \log \log \log x).$$

In einer neulich erschienenen Arbeit [3]) habe ich bemerkt, daß die Funktion

$$\frac{\psi(x) - x}{\sqrt{x}},$$

die also jedenfalls nicht beschränkt ist, doch einen beschränkten Quadratmittelwert hat, d. h. daß

$$\frac{1}{x} \int_2^x \left(\frac{\psi(t) - t}{\sqrt{t}} \right)^2 dt = O(1)$$

---

[1]) Sur la distribution des nombres premiers, Acta Mathematica **24** (1901), S. 159–182.

[2]) Hardy and Littlewood, Contributions to the theory of the Riemann zeta-function and the theory of the distribution of primes, Acta Mathematica **41** (1917), S. 119–196.

[3]) Some theorems concerning prime numbers, Arkiv för Matematik **15**, Nr. 5 (1920), 33 S.

gilt. Ich habe auch daselbst die Frage aufgeworfen, ob nicht dieser Ausdruck sogar einen Limes für $x \to \infty$ hat. Daß aber diese Frage zu verneinen ist, geht aus dem zweiten Teile des folgenden jetzt zu beweisenden Satzes hervor, von dem der erste Teil gewissermaßen ein Analogon des bekannten Parsevalschen Satzes aus der Theorie der Fourierschen Reihen bildet.

Satz. *Wenn die Riemannsche Vermutung wahr ist, so gilt für* $x \to \infty$

$$\frac{1}{\log x}\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt \to \sum_\varrho \left|\frac{n_\varrho}{\varrho}\right|^2, \tag{1}$$

wo ϱ *die komplexen Nullstellen der Funktion* $\zeta(s)$ *durchläuft und* n_ϱ *den Grad der Vielfachheit von* ϱ *angibt. — Dagegen schwankt für jedes* $\alpha < 1$ *der Ausdruck*

$$\frac{1}{x^{2(1-\alpha)}}\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t^\alpha}\right)^2 dt \tag{2}$$

zwischen zwei verschiedenen endlichen Unbestimmtheitsgrenzen.

Wenn wir in dieser Arbeit die Bezeichnung $\sum_\varrho$ anwenden, so denken wir uns immer die $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma$ nach absolut wachsenden Ordinaten geordnet und, etwas abweichend vom gewöhnlichen Gebrauche, jedes ϱ von seiner Vielfachheit abgesehen nur genau einmal gezählt.

2. Für den Beweis werden wir die v. Mangoldtsche Formel[4])

$$\psi(t) = t - \sum_\varrho n_\varrho \frac{t^\varrho}{\varrho} - \frac{1}{2}\log\left(1-\frac{1}{t^2}\right) - \log 2\pi$$

benutzen, die für alle $t > 2$ gilt, welche nicht von der Form $t = p^m$ sind. Die hier auftretende Reihe ist in jedem endlichen abgeschlossenen Intervall solcher t-Werte gleichmäßig konvergent, und ihre „Teilsummen" $\sum_{|\gamma|<A} n_\varrho \frac{t^\varrho}{\varrho}$ sind in jedem Intervall $2 \leqq t \leqq x$ gleichmäßig beschränkt.

Schreiben wir also

$$\begin{aligned}\left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 &= \frac{1}{t^2}\left(-\sum_\varrho n_\varrho \frac{t^\varrho}{\varrho} + O(1)\right)^2 \\ &= \sum_\varrho n_\varrho \sum_{\varrho'} n_{\varrho'} \frac{t^{\varrho+\varrho'-2}}{\varrho\,\varrho'} + O\left(\frac{1}{t^2}\right) + O\left(\left|\sum_\varrho n_\varrho \frac{t^{\varrho-2}}{\varrho}\right|\right) \\ &= \sum_\varrho n_\varrho \sum_{\varrho'} n_{\varrho'} \frac{t^{\varrho+\varrho'-2}}{\varrho\,\varrho'} + O\left(t^{-\frac{3}{2}}\log^2 t\right),\end{aligned}$$

[4]) Vgl. z. B. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig und Berlin 1909, **1**, S. 365.

so kann hier von 2 bis x gliedweise integriert werden, und wir erhalten

$$\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt = \sum_\varrho \frac{n_\varrho}{\varrho} \sum_{\varrho'} \frac{n_{\varrho'}}{\varrho'} \int_2^x t^{\varrho+\varrho'-2}\, dt + O(1),$$

wo, bei der angegebenen Summationsordnung, die Doppelreihe konvergent ist. Es gilt nun

$$\varrho(1-\varrho) = |\varrho|^2$$

und nach bekannten Sätzen über die Verteilung der ϱ ist die Reihe

$$\sum_\varrho \left|\frac{n_\varrho}{\varrho}\right|^2$$

konvergent. Hieraus folgt weiter

$$(3) \qquad \int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt = \log x \sum_\varrho \left|\frac{n_\varrho}{\varrho}\right|^2 + \sum_\varrho \frac{n_\varrho}{\varrho} \sum_{\varrho' \neq 1-\varrho} \frac{n_{\varrho'}}{\varrho'} \cdot \frac{x^{\varrho+\varrho'-1} - 2^{\varrho+\varrho'-1}}{\varrho+\varrho'-1} + O(1).$$

Wir wollen beweisen, daß das erste Glied rechts für das asymptotische Verhalten des ganzen Ausdrucks ausschlaggebend ist, d. h. daß die Doppelreihe von der Form $o(\log x)$ ist.

Es sei nun η eine beliebig kleine, aber von x unabhängige, positive Zahl, kleiner als das kleinste positive γ. Dann werden wir zuerst zeigen, daß die Summe, die man erhält, wenn man in der Doppelreihe nur die Glieder mit

$$|\varrho+\varrho'-1| \geqq \eta$$

nimmt, absolut konvergent und von der Form $O(1)$ ist. Aus Symmetriegründen genügt es zu zeigen, daß die beiden Reihen

$$\sum_{\gamma>0} \frac{n_\varrho}{|\varrho|} \sum_{\gamma'>0} \frac{n_{\varrho'}}{|\varrho'|(\gamma+\gamma')}$$

und

$$(4) \qquad \sum_{\gamma>0} \frac{n_\varrho}{|\varrho|} \sum_{0<\gamma'\leqq\gamma-\eta} \frac{n_{\varrho'}}{|\varrho'|(\gamma-\gamma')}$$

konvergieren, und man findet sogar, daß es hinreichend ist, nur die letzte Reihe zu betrachten. Nach der bekannten Formel

$$N(T) = \frac{T}{2\pi}\left(\log\frac{T}{2\pi} - 1\right) + O(\log T),$$

wo $N(T)$ die Anzahl der $\varrho = \frac{1}{2} + i\gamma$ angibt, die der Beziehung $0 < \gamma \leqq T$ genügen [5]), findet man nun für hinreichend große γ

[5]) Vgl. E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig und Berlin 1909, 1, S. 368.

$$\sum_{0<\gamma'\leqq\gamma-\eta}\frac{n_{\varrho'}}{|\varrho'|(\gamma-\gamma')}=\sum_{0<\gamma'\leqq\gamma^{\frac{2}{3}}}+\sum_{\gamma^{\frac{2}{3}}<\gamma'\leqq\gamma-\gamma^{\frac{2}{3}}}+\sum_{\gamma-\gamma^{\frac{2}{3}}<\gamma'\leqq\gamma-\eta}$$

$$=O\left(\frac{\gamma^{\frac{2}{3}}\log\gamma}{\gamma}+\frac{\gamma\log\gamma}{\gamma^{\frac{4}{3}}}+\frac{\gamma^{\frac{2}{3}}\log\gamma}{\gamma}\right)=O\left(\frac{\log\gamma}{\gamma^{\frac{1}{3}}}\right),$$

so daß die Reihe (4) konvergiert. Aus (3) folgt also

$$(5)\qquad \int_2^x\left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2dt=\log x\sum_\varrho\left|\frac{n_\varrho}{\varrho}\right|^2$$

$$+\sum_{0<|\gamma+\gamma'|<\eta}\sum\frac{n_\varrho n_{\varrho'}(x^{\varrho+\varrho'-1}-2^{\varrho+\varrho'-1})}{i\varrho\varrho'(\gamma+\gamma')}+O(1)$$

und es muß nur noch gezeigt werden, daß, wenn ε beliebig klein gegeben ist, η und x_0 so gewählt werden können, daß

$$\left|\sum_\varrho\sum_{0<|\gamma+\gamma'|<\eta}\frac{n_\varrho n_{\varrho'}(x^{i(\gamma+\gamma')}-2^{i(\gamma+\gamma')})}{\varrho\varrho'(\gamma+\gamma')}\right|<\varepsilon\log x$$

für $x>x_0$ gilt.

Da die Gliederzahl der inneren Summe endlich ist und in der Summe $\sum_\varrho$ die Glieder nach wachsendem $|\gamma|$ geordnet sind, kann man immer zwei Glieder $(\varrho=\frac{1}{2}+i\gamma,\ \varrho'=\frac{1}{2}+i\gamma')$ und $(\varrho=\frac{1}{2}-i\gamma,\ \varrho'=\frac{1}{2}-i\gamma')$ zusammenfassen. Es genügt also, die Ungleichung

$$\left|\sum_\varrho\sum_{0<\gamma+\gamma'<\eta}\frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{\gamma+\gamma'}\Im\frac{x^{i(\gamma+\gamma')}-2^{i(\gamma+\gamma')}}{\varrho\varrho'}\right|<\frac{1}{2}\varepsilon\log x$$

oder sogar

$$(6)\qquad \sum_\varrho\sum_{0<\gamma+\gamma'<\eta}\frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{|\varrho|^2|\varrho'|^2(\gamma+\gamma')}|\Im\bar\varrho\bar\varrho' x^{i(\gamma+\gamma')}|<\frac{1}{4}\varepsilon\log x$$

für alle $x\geqq 2$, bei zweckmäßiger Wahl von η, zu beweisen. Es gilt nun

$$|\Im\bar\varrho\bar\varrho' x^{i(\gamma+\gamma')}|=|-\tfrac{1}{2}(\gamma+\gamma')\cos(\gamma+\gamma')\log x+(\tfrac{1}{4}-\gamma\gamma')\sin(\gamma+\gamma')\log x|$$
$$<\gamma+\gamma'+2|\gamma\gamma'\sin(\gamma+\gamma')\log x|<3|\gamma\gamma'|(\gamma+\gamma')\log x;$$

die linke Seite von (6) ist also kleiner als

$$(7)\qquad 3\log x\sum_\varrho\sum_{0<\gamma+\gamma'<\eta}\frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{|\gamma\gamma'|}.$$

Es sei nun K eine solche Konstante, daß für alle $T>2$ die Ungleichung $T-1<\gamma<T+1$ von höchstens $K\log T$ Nullstellen (jede mit ihrer Vielfachheit gezählt) erfüllt ist, und es sei $A>0$ so gewählt, daß

$$\sum_{\gamma>A}n_\varrho\frac{\log\gamma}{\gamma(\gamma-1)}<\frac{\varepsilon}{24K}$$

gilt. Dann wählen wir η so, daß erstens $\eta < 1$ und zweitens η kleiner als die kleinste Differenz zweier verschiedener γ im Intervalle $0 < \gamma \leqq A + 1$ wird. Die Glieder der Doppelsumme in (7) können dann nur solche ϱ enthalten, für welche $|\gamma| > A$ gilt. Wir haben also

$$3 \log x \sum_{\varrho} \sum_{0<\gamma+\gamma'<\eta} \frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{|\gamma\gamma'|} < 3 \log x \sum_{|\gamma|>A} \sum_{0<\gamma+\gamma'<\eta} \frac{n_\varrho n_{\varrho'}}{|\gamma|(|\gamma|-1)}$$

$$< 6 \log x \sum_{\gamma>A} \frac{K \log \gamma \cdot n_\varrho}{\gamma(\gamma-1)} < \frac{\varepsilon}{4} \log x .$$

Hierdurch ist (6) bewiesen, und aus (5) folgt dann der erste Teil unseres Satzes:

$$\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt = \log x \sum_{\varrho} \left|\frac{n_\varrho}{\varrho}\right|^2 + o(\log x).$$

3. In gleicher Weise wie oben erhalten wir, wenn $\alpha < 1$ und von x unabhängig ist,

$$(8) \quad \frac{1}{x^{2(1-\alpha)}} \int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t^\alpha}\right)^2 dt = \sum_{\varrho} \frac{n_\varrho}{\varrho} \sum_{\varrho'} \frac{n_{\varrho'}}{\varrho'} \cdot \frac{x^{\varrho+\varrho'-1}}{\varrho+\varrho'+1-2\alpha} + o(1).$$

Die Hauptschwierigkeit bei dem soeben behandelten Falle $\alpha = 1$ lag nun darin, daß der in der Doppelreihe in (3) im Nenner auftretende Faktor $\varrho + \varrho' - 1$ beliebig kleine Werte annehmen konnte. Deshalb mußte diese Reihe in zwei Teile geteilt und die beiden Teile in verschiedener Weise abgeschätzt werden. Hier aber hat der entsprechende Faktor $\varrho + \varrho' + 1 - 2\alpha$ den reellen Teil $2(1-\alpha) > 0$, und man kann die ganze Doppelreihe in genau derselben Weise wie vorhin die Glieder mit $|\varrho + \varrho' - 1| \geqq \eta$ behandeln. Man zeigt in dieser Weise, daß die Doppelreihe unbedingt konvergent und von der Form $O(1)$ ist. Hierdurch ist schon bewiesen, daß die Unbestimmtheitsgrenzen von (2) *endlich* sind, und wir haben nur noch zu zeigen, daß sie *verschieden* sind.

Zuerst bemerken wir, daß die absolut konvergente Doppelreihe

$$(9) \quad \sum_{\varrho} \frac{n_\varrho}{\varrho} \sum_{\varrho'} \frac{n_{\varrho'}}{\varrho'} \cdot \frac{x^{\varrho+\varrho'-1}}{\varrho+\varrho'+1-2\alpha}$$

jedenfalls nicht für alle $x > 2$ konstant sein kann. Denn in diesem Falle würde man durch Multiplikation mit $x^{2(1-\alpha)}$ und Differentiation

$$\left(\sum \frac{n_\varrho}{\varrho} x^\varrho\right)^2 = 2(1-\alpha) K x$$

für alle $x \neq p^m$ erhalten. (Für alle solche Werte von x darf man nach bekannten Sätzen gliedweise differentiieren.) Das ist aber z. B. mit dem oben zitierten Littlewoodschen Satze nicht verträglich.

Wenn wir jetzt noch beweisen können, daß die Doppelreihe (9) jedem Werte, den sie überhaupt für $x > 2$ annimmt, wieder für beliebig große Werte von x beliebig nahe kommt, so folgt daraus, daß die linke Seite von (8) keinen bestimmten Limes für $x \to \infty$ haben kann, und unser Satz ist dann vollständig bewiesen. Dies folgt aber leicht aus dem bekannten Dirichlet-Kroneckerschen Satz über diophantische Approximationen, der etwa folgendermaßen ausgesprochen werden kann [6]):

„Es seien n reelle Größen $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ und zwei positive Zahlen t_0 (groß) und ε (klein) gegeben. Dann kann man n ganze Zahlen $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ und ein $t > t_0$ bestimmen, so daß die Ungleichungen

$$\begin{aligned} |t\alpha_1 - 2\pi\mu_1| &< \varepsilon \\ \cdot\ \cdot\ \cdot

Beschränktheit von (1) *oder* (2) *folgt also umgekehrt die Riemann-sche Vermutung.*

Es genügt, dies für (1) zu beweisen. Es gilt nämlich, wenn wir den Ausdruck (2) gleich $f_\alpha(x)$ setzen,

$$\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt = f_\alpha(x) + 2(1-\alpha)\int_2^x \frac{f_\alpha(t)}{t}\,dt,$$

so daß aus der Beschränktheit von (2) auch die Beschränktheit von (1) folgt. — Aus der bekannten Schwarzschen Ungleichung erhalten wir

$$\left(\int_2^x \frac{\psi(t)-t}{t}\,dt\right)^2 \leqq (x-2)\int_2^x \left(\frac{\psi(t)-t}{t}\right)^2 dt,$$

also, wenn (1) beschränkt ist,

$$\int_2^x \frac{\psi(t)-t}{t}\,dt = O(\sqrt{x\log x}),$$

d. h.

$$\sum_{n<x} \Lambda(n)\log\frac{x}{n} = x + O(\sqrt{x\log x}),$$

wo wie gewöhnlich $\Lambda(n) = \psi(n) - \psi(n-1)$ gesetzt ist. Da nun

$$\sum_{n<x} \log\frac{x}{n} = x + O(\log x)$$

gilt, wäre also

$$\sum_{n<x} (\Lambda(n)-1)\log\frac{x}{n} = O(\sqrt{x\log x}).$$

Die Reihe $\sum_1^\infty (\Lambda(n)-1)\,n^{-\sigma-it}$ wäre also für $\sigma > \frac{1}{2}$ summierbar[7]) $(\log n, 1)$ und daraus folgt bekanntlich die Regularität der Funktion von $s = \sigma + it$

$$\frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} + \zeta(s)$$

für $\sigma > \frac{1}{2}$, d. h. die Riemannsche Vermutung.

Mörby, Stocksund, den 7. Juni 1921.

---

[7]) Vgl. Hardy und Riesz, The general theory of Dirichlet's series, Cambridge 1915, Theorem **31**, S. 45.

(Eingegangen am 13. Juni 1921.)

Zur Infinitesimalgeometrie: p dimensionale Fläche im n dimensionalen Raum.

Von

H. Weyl in Zürich.

Die erste Aufgabe der Infinitesimalgeometrie ist es, eine einzelne stetige *Mannigfaltigkeit für sich* zu betrachten; erst in zweiter Linie steht das Studium einer p dimensionalen *Mannigfaltigkeit* („Fläche"), *welche in eine höherdimensionale Mannigfaltigkeit* (den n dimensionalen „Raum") *eingebettet ist.* Von diesem Problem, von welchem die Theorie der krummen Kurven und Flächen im dreidimensionalen Euklidischen Raum ein Spezialfall ist, soll hier die Rede sein; ich möchte zeigen, wie die Grundbegriffe und Grundformeln dieser Theorie einheitlich, anschaulich und ohne neue Rechnung aus der Infinitesimalgeometrie der Einzelmannigfaltigkeit gewonnen werden können.

Es seien $x_1\, x_2 \ldots x_n$ Koordinaten im n dimensionalen Raum, $y_1\, y_2 \ldots y_p$ Koordinaten auf der p dimensionalen Fläche. Die Einbettungsgleichungen, welche angeben, an welcher Raumstelle x_J ein beliebiger Flächenpunkt $P = (y_\alpha)$ sich befindet, mögen lauten

$$x_J = x_J(y_1\, y_2 \ldots y_p) \qquad (J = 1, 2, \ldots, n).$$

Innerhalb des n dimensionalen zu P gehörigen Vektorraumes legt die Fläche den p dimensionalen *Tangentialraum* $\mathfrak{T} = \mathfrak{T}_P$ fest, der von den Vektoren

$$e_\alpha = (e_\alpha^1, e_\alpha^2, \ldots, e_\alpha^n) = \left(\frac{\partial x_1}{\partial y_\alpha}, \frac{\partial x_2}{\partial y_\alpha}, \ldots, \frac{\partial x_n}{\partial y_\alpha}\right) \quad (\alpha = 1, 2, \ldots, p)$$

aufgespannt wird.

I. Wir nehmen zunächst nur an, daß *der Raum einen affinen Zusammenhang trägt.* Um ihn auf die Fläche übertragen zu können, müssen wir voraussetzen, daß dem willkürlichen Flächenpunkte P außer dem p dimensionalen Tangential- auch noch ein $q = (n - p)$ dimensionaler „*Normalraum*" $\mathfrak{N} = \mathfrak{N}_P$ zugeordnet ist. Er besteht gleichfalls aus einer linearen Schar von Vektoren in P; $\mathfrak{T}$ und $\mathfrak{N}$ dürfen keinen Vektor außer 0

gemeinsam haben, so daß sich jeder Vektor in P auf eine und nur eine Weise aus einem tangentialen und einem normalen additiv zusammensetzt. Aus einer leicht verständlichen Vorstellung heraus will ich unter diesen Umständen von einer in den Raum *eingespannten* Fläche sprechen. e_i $(i = p+1, \ldots, n)$ seien q unabhängige Vektoren, welche den Normalraum aufspannen. Wende ich die Zerspaltung des Vektorraums in $\mathfrak{T} + \mathfrak{N}$ an auf die Parallelverschiebung eines beliebigen Vektors in P nach dem unendlich benachbarten Flächenpunkte P', so erhalte ich folgendes:

1. Aus einem tangentialen Vektor $\boldsymbol{t}$ in P entsteht ein Vektor $\boldsymbol{t}' + d\boldsymbol{n}$ in P' ($\boldsymbol{t}'$ tangential, $d\boldsymbol{n}$ normal). Das Gesetz $\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{t}'$, nach welchem ein Flächenvektor in P übergeht in einen Flächenvektor in P', bezeichne ich als den *affinen Zusammenhang der Fläche.* Das Gesetz $\boldsymbol{t} \to d\boldsymbol{n}$, nach welchem aus einem Flächenvektor in P und einer infinitesimalen Verschiebung in der Fläche ein infinitesimaler Normalvektor $d\boldsymbol{n}$ in P entsteht, wird wie in der gewöhnlichen Flächentheorie als *Krümmung* zu bezeichnen sein; die Krümmung mißt, in welchem Maße beim Fortschreiten auf der Fläche durch Parallelverschiebung der Tangentialraum zum Normalraum sich hinüberwendet.

2. Aus einem normalen Vektor $\boldsymbol{n}$ in P entsteht ein Vektor $\boldsymbol{n}' + d\boldsymbol{t}$ ($\boldsymbol{n}'$ normal, $d\boldsymbol{t}$ tangential). Die infinitesimale lineare Abbildung $\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{n}'$ von $\mathfrak{N}_P$ auf $\mathfrak{N}_{P'}$ ist die *Torsion.* Das Gesetz $\boldsymbol{n} \to d\boldsymbol{t}$, das aus einem normalen Vektor und einer infinitesimalen Verschiebung in der Fläche einen infinitesimalen tangentialen Vektor entstehen läßt und welches angibt, wie sich der Normalraum bei seiner Verschiebung auf der Fläche zum Tangentialraum hinüberwendet, könnte man zum Unterschied von der unter 1. erwähnten „longitudinalen" die *Transversalkrümmung* nennen.

Ist

$$dv^i = -d\gamma_l^i \cdot v^l, \qquad d\gamma_l^i = \Gamma_{l\varrho}^i (dy)^\varrho \qquad (\Gamma_{\alpha\beta}^i = \Gamma_{\beta\alpha}^i)$$

die Formel für die in der Fläche sich vollziehende infinitesimale Parallelverschiebung eines willkürlichen Vektors $v^i e_i$ — die deutschen Indizes durchlaufen alle Werte von 1 bis n, die griechischen nur von 1 bis p, $(dy)^\alpha$ steht wegen seines kontravarianten Verhaltens statt dy_α —, so entspricht diese Zerspaltung in vier Bestandteile der nebenstehend angedeuteten Zerlegung des quadratischen Schemas der Koeffizienten $d\gamma_l^i$ (i ist Zeilen-, l Kolonnenindex). Bei Trennung in Tangential- und Normal-Bestandteil verwenden wir für diesen lateinische, für jenen griechische Indizes, setzen $e_{p+i} = \bar{e}_i$ und bezeichnen einen willkürlichen tangentialen Vektor mit $v^\alpha e_\alpha$, einen willkürlichen normalen mit $v^i \bar{e}_i$. Dann sind

	$1 \ldots p$	$p+1 \ldots n$
$1 \ldots p$	affiner Zusammenhang	transversale Krümmung
$p+1 \ldots n$	longitudinale Krümmung	Torsion

tt) $\Gamma^{\alpha}_{\varrho\sigma} = \Gamma^{\alpha}_{\sigma\varrho}$ die Komponenten des affinen Zusammenhangs der Fläche; das Gesetz $t \to t'$ lautet in Formeln: $dv^{\alpha} = -\Gamma^{\alpha}_{\varrho\sigma} v^{\varrho} (dy)^{\sigma}$.

nt) $G^{i}_{\alpha\beta} = \Gamma^{p+i}_{\alpha\beta}$ sind die Komponenten der Krümmung: zu zwei infinitesimalen Verschiebungen d und δ auf der Fläche gehört der normale Vektor mit den Komponenten $-G^{i}_{\alpha\beta}(dy)^{\alpha}(\delta y)^{\beta}$ $(i = 1, 2, \ldots, q)$; wie in der gewöhnlichen Flächentheorie gilt auch hier für diese „zweite Fundamentalform" das Symmetriegesetz $G^{i}_{\alpha\beta} = G^{i}_{\beta\alpha}$.

tn) $\bar{G}^{\alpha}_{i\beta} = \Gamma^{\alpha}_{p+i,\beta}$ sind die Komponenten der Transversalkrümmung, die aus einem tangentialen dy durch einen normalen Vektor $\bar{v}$ ein anderes δy entstehen läßt: $(\delta y)^{\alpha} = -\bar{G}^{\alpha}_{i\beta}\bar{v}^{i}(dy)^{\beta}$.

nn) $\mathsf{T}^{i}_{k\alpha} = \Gamma^{p+i}_{p+k,\alpha}$ Torsion: $d\bar{v}^{i} = -\mathsf{T}^{i}_{k\alpha}\bar{v}^{k}(dy)^{\alpha}$.

Verändert sich ein Vektor mit den Komponenten u^{J} im Koordinatensystem der x_{J} bei der Verschiebung $(dx)^{J}$ des Anfangspunktes im Raum in den Vektor $u^{J} + du^{J}$, so mißt der Vektor mit den Komponenten $du^{J} + d\beta^{J}_{K} \cdot u^{K}$ seine invariante Änderung; in $d\beta^{J}_{K} = \mathsf{B}^{J}_{KN}(dx)^{N}$ sind B die Komponenten des räumlichen affinen Zusammenhangs. Wenden wir das an auf die zur Fläche gehörigen „Einheitsvektoren" $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{e}_{i} = (e^{1}_{i}, e^{2}_{i}, \ldots, e^{n}_{i})$ bei einer Verschiebung *in der Fläche* und drücken die invariante Änderung der $\boldsymbol{e}_{i}$ zugleich in ihrem eigenen Koordinatensystem aus, so erhalten wir die „*Fundamentalformeln der Flächentheorie*", die im Falle $p = 1$ an den Namen Frenets geknüpft zu werden pflegen:

$$(1) \qquad \frac{\partial e^{J}_{i}}{\partial y_{\alpha}} + \mathsf{B}^{J}_{MN} e^{M}_{i} e^{N}_{\alpha} = \Gamma^{j}_{i\alpha} e^{J}_{j}.$$

Ist der Raum *eben* und das verwendete räumliche Koordinatensystem ein lineares $(\mathsf{B} = 0)$, so lauten diese Gleichungen insbesondere:

$$(2) \qquad \frac{\partial \boldsymbol{e}_{i}}{\partial y_{\alpha}} = \Gamma^{t}_{i\alpha}\boldsymbol{e}_{t},$$

oder zerspalten:

$$(3) \quad t) \ \frac{\partial \boldsymbol{e}_{\beta}}{\partial y_{\alpha}} = \Gamma^{\varrho}_{\alpha\beta}\boldsymbol{e}_{\varrho} + G^{r}_{\alpha\beta}\bar{\boldsymbol{e}}_{r}, \qquad n) \ \frac{\partial \bar{\boldsymbol{e}}_{i}}{\partial y_{\alpha}} = \bar{G}^{\varrho}_{i\alpha}\boldsymbol{e}_{\varrho} + \mathsf{T}^{r}_{i\alpha}\bar{\boldsymbol{e}}_{r}.$$

II. Vom affinen Zusammenhang kommen wir zur *Metrik*. Ist der Raum ein metrischer Riemannscher Raum, so überträgt sich seine Metrik ohne weiteres auf jede in ihn *eingebettete* Fläche. Soll dabei die metrische Fundamentalform der Fläche niemals eine ausgeartete werden, so muß die metrische Fundamentalform des Raumes definit sein, und das wollen wir denn in der Tat für das Folgende voraussetzen. Die Fläche werde *auf natürliche Art in den Raum eingespannt*, d. h. der Normalraum $\mathfrak{N}$ bestehe aus allen Vektoren, welche zu $\mathfrak{T}$ senkrecht sind. Für $\bar{\boldsymbol{e}}_{i} = \boldsymbol{e}_{p+i}$ wählen wir q Vektoren von der Länge 1, die aufeinander senkrecht stehen.

Die Komponenten g_{it} des metrischen Raumfeldes im Flächenpunkte P, das sind die skalaren Produkte $(e_i \cdot e_t)$, bilden dann das nebenstehende Schema. Darin ist

$g_{11} \cdots g_{1p}$	$0 \,.\, 0$
$\cdots\cdots\cdots$	$\cdots$
$g_{p1} \cdots g_{pp}$	$0 \,.\, 0$
$0 \,\ldots\, 0$	$1 \,.\, 0$
$\cdots\cdots\cdots$	$\cdots$
$0 \,\ldots\, 0$	$0 \,.\, 1$

$$ds^2 = g_{\alpha\beta}(dy)^\alpha (dy)^\beta$$

die *metrische Fundamentalform der Fläche.*

Der metrische Raum ist mit einem affinen Zusammenhang ausgestattet, der eindeutig dadurch charakterisiert ist, daß bei infinitesimaler Parallelverschiebung eines Vektors dessen Maßzahl ungeändert bleibt. Bei Zerspaltung in $\mathfrak{T} + \mathfrak{N}$ liefert das die folgenden Aussagen:

1. die Abbildung $\boldsymbol{t} \to \boldsymbol{t}'$ von $\mathfrak{T}_P$ auf $\mathfrak{T}_{P'}$ läßt die Länge der Vektoren $\boldsymbol{t}$ ungeändert; oder: *der affine Zusammenhang der Fläche ist derjenige, welcher zu der auf der Fläche herrschenden Metrik gehört;*

2. für die Abbildungen $\boldsymbol{t} \to d\boldsymbol{n}$ und $\boldsymbol{n} \to d\boldsymbol{t}$ gilt $(\boldsymbol{t} \cdot d\boldsymbol{t}) + (\boldsymbol{n} \cdot d\boldsymbol{n}) = 0$; dadurch *wird die transversale Krümmung auf die longitudinale zurückgeführt;*

3. auch die Abbildung $\boldsymbol{n} \to \boldsymbol{n}'$ (die *Torsion*) ist eine *kongruente*, eine infinitesimale „Drehung". — In Formeln drückt sich das so aus: die Gleichung

$$dg_{it} = g_{ir}\, d\gamma_t^r + g_{tr}\, d\gamma_i^r \tag{4}$$

spaltet sich in

$$\begin{cases} tt) & \dfrac{\partial g_{\mu\nu}}{\partial y_\alpha} = g_{\mu\varrho}\Gamma^\varrho_{\nu\alpha} + g_{\nu\varrho}\Gamma^\varrho_{\mu\alpha}, \\ nt) \text{ oder } tn) & 0 = G^i_{\alpha\beta} + g_{\alpha\varrho}\bar{G}^\varrho_{i\beta}, \\ nn) & 0 = \mathsf{T}^i_{k\alpha} + \mathsf{T}^k_{i\alpha}. \end{cases} \tag{5}$$

III. Umfährt der Vektor $v^i e_i$ ein unendlichkleines zweidimensionales Element auf der Fläche mit den Komponenten

$$(\Delta y)^{\alpha\beta} = (dy)^\alpha (\delta y)^\beta - (dy)^\beta (\delta y)^\alpha,$$

so erleidet er eine Änderung

$$\Delta v^i = \Delta r^i_t \cdot v^t = \frac{1}{2} R^i_{t\alpha\beta} v^t (\Delta y)^{\alpha\beta},$$

wo

$$R^i_{t\alpha\beta} = \left(\frac{\partial \Gamma^i_{t\beta}}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial \Gamma^i_{t\alpha}}{\partial y_\beta}\right) + (\Gamma^i_{\tau\alpha}\Gamma^\tau_{t\beta} - \Gamma^i_{\tau\beta}\Gamma^\tau_{t\alpha}).$$

Um Verwechslungen zu vermeiden, gebrauche ich hierfür statt des Riemannschen Namens „Krümmung" den Terminus „*Wirbel*", der mir

allgemein für die Änderung einer Größe beim Umfahren eines Flächenelements passend erscheint. Im metrischen Raum ist $\Delta r_{it} = g_{ij}\Delta r_t^j$ eine schiefsymmetrische Matrix, weil der Vektor beim Umfahren seine Länge nicht ändert. Wiederum zerlegt sich das quadratische Schema der Δr_t^i in die vier Bestandteile *tt*, *nt*, *tn*, *nn* (tangentialer und normaler Bestandteil der Änderung eines tangentiellen und eines normalen Vektors); ich schreibe die Ausdrücke explizite an für den Fall des metrischen Raumes.

$$tt) \quad R_{\gamma\delta;\,\alpha\beta} = S_{\gamma\delta;\,\alpha\beta} + (G^r_{\gamma\alpha}G^r_{\delta\beta} - G^r_{\gamma\beta}G^r_{\delta\alpha}),$$

$$nn) \quad R_{p+i,\,p+k;\,\alpha\beta} = U_{ik;\,\alpha\beta} + g^{\varrho\sigma}(G^i_{\alpha\varrho}G^k_{\beta\sigma} - G^i_{\beta\varrho}G^k_{\alpha\sigma}).$$

$S_{\gamma\delta;\,\alpha\beta}$ ist der *longitudinale Flächenwirbel* (oder die „Riemannsche Krümmung" der Fläche): Änderung eines tangentialen Vektors, der nach dem Verschiebungsgesetz $t \to t'$ ein in der Fläche gelegenes zweidimensionales Element umfährt; er hängt nur vom affinen Zusammenhang der Fläche (oder ihrer metrischen Fundamentalform) ab. Der *transversale Flächenwirbel* $U_{ik;\,\alpha\beta}$ aber ist die Änderung eines normalen Vektors, der nach dem Verschiebungsgesetz $n \to n'$ um das Flächenelement herumgeführt wird; er gehört so zur Torsion, wie der longitudinale Wirbel zum affinen Zusammenhang der Fläche. — Den Bestandteil

$$nt) \quad C^i_{\gamma,\,\alpha\beta} = \left(\frac{\partial G^i_{\gamma\beta}}{\partial y_\alpha} - \frac{\partial G^i_{\gamma\alpha}}{\partial y_\beta}\right) + (\Gamma^\varrho_{\gamma\beta}G^i_{\alpha\varrho} - \Gamma^\varrho_{\gamma\alpha}G^i_{\beta\varrho}) + (G^r_{\gamma\beta}\Gamma^i_{r\alpha} - G^r_{\gamma\alpha}\Gamma^i_{r\beta})$$

bezeichne ich als *Codazzischen Tensor*; wegen der Schiefsymmetrie von Δr_{it} ist der Bestandteil *tn*) $\bar{C}^\gamma_{i,\,\alpha\beta}$ im wesentlichen damit identisch: $C^i_{\gamma,\,\alpha\beta} + g_{\gamma\varrho}\bar{C}^\varrho_{i,\,\alpha\beta} = 0$.

Ist der Raum ein ebener, so ist *die Änderung eines Vektors beim Umfahren eines Flächenelements* $= 0$:

$$(6) \qquad R^i_{t\,\alpha\beta} = 0,$$

oder zerlegt:

$$(7) \quad \begin{cases} tt) \text{ longitudinaler Flächenwirbel} = \sum_r (G^r_{\alpha\delta}G^r_{\beta\gamma} - G^r_{\beta\delta}G^r_{\alpha\gamma}), \\ nn) \text{ transversaler Flächenwirbel} = \sum_{\varrho\,\sigma} g^{\varrho\sigma}(G^k_{\alpha\sigma}G^i_{\beta\varrho} - G^k_{\beta\sigma}G^i_{\alpha\varrho}), \\ nt) \text{ od. } tn) \text{ der Codazzische Tensor} = 0. \end{cases}$$

Das sind die *Integrabilitätsbedingungen* der „Fundamentalformeln" (2) bzw. (3); sind sie erfüllt, so haben jene Gleichungen, als Differentialgleichungen für die Unbekannten e_i betrachtet, eine und nur eine Lösung mit beliebig vorgegebenen Anfangswerten. Bedeutet x den vom Nullpunkt zum Flächenpunkt führenden Vektor mit den Komponenten x_j, so kann

nan dann x aus $\frac{\partial x}{\partial y_\alpha} = e_\alpha$ bestimmen, da nach (3_t) $\frac{\partial e_\alpha}{\partial y_\beta} = \frac{\partial e_\beta}{\partial y_\alpha}$ ist. Im netrischen Fall erfüllen die Lösungen e_t identisch auf der Fläche die Gleichungen $(e_t \cdot e_t) = g_{tt}$, wenn dies für die Anfangswerte zutrifft; denn nach (2) genügen die Größen $g^*_{tt} = (e_t \cdot e_t)$ ebenso gut wie die g_{tt} selber den Beziehungen

(4*; vgl. 4) $$dg^*_{tt} = g^*_{t\tau}\, d\gamma^\tau_t + g^*_{t\tau}\, d\gamma^\tau_t.$$

Zu gegebener metrischer Fundamentalform, gegebener Krümmung und Torsion existiert im Euklidischen Raum stets eine und (im Sinne der Kongruenz) *nur eine Fläche, vorausgesetzt, daß die gegebenen Größen den Bedingungen* (6) *bzw.* (7) *genügen* (*Fundamentalsatz der Flächentheorie*).

Der ebene ist nicht der einzige metrisch homogene Raum; auch die „Kugel" von der (positiven oder negativen) konstanten Krümmung λ, deren metrische Fundamentalform

$$(dx_1^2 + dx_2^2 + \ldots + dx_n^2) + \frac{\lambda(x_1\, dx_1 + \ldots + x_n\, dx_n)^2}{1 - \lambda(x_1^2 + x_2^2 + \ldots + x_n^2)}$$

lautet, ist von solcher Art. Daher kann auch in einem derartigen *Kugelraum* das Problem gestellt werden, eine Fläche aus ihrer Metrik, Krümmung und Torsion zu bestimmen. Seine Lösung gelingt auf die gleiche Weise; die „Fundamentalformeln" und „Integrabilitätsbedingungen" können einfach herübergenommen werden mit den folgenden beiden Modifikationen: Auf der rechten Seite von (3_t) ist der Term $-\lambda g_{\alpha\beta} \cdot x$, von (7_{tt}) der Term $-\lambda(g_{\alpha\delta} g_{\beta\gamma} - g_{\alpha\gamma} g_{\beta\delta})$ hinzuzufügen.

In einem beliebigen Raum mit affinem Zusammenhang, dessen Wirbel im Koordinatensystem der x_J die Komponenten R^J_{KAB} hat, treten an Stelle von (6) die Gleichungen

$$R^i_{t\alpha\beta}\, e_i^J = \mathrm{R}^J_{KAB}\, e_t^K\, e_\alpha^A\, e_\beta^B.$$

Das alles ist ja ganz trivial; aber es mußte doch einmal gesagt werden. Es wäre sehr zu wünschen, daß auch die gewöhnliche Flächentheorie den Begriff der infinitesimalen Parallelverschiebung, die Auffassung der Riemannschen Krümmung als eines Vektorwirbels und den Gedanken, daß affiner Zusammenhang der Fläche, Krümmung und Torsion eine natürliche Einheit bilden, aufnähme; der Gewinn an Anschaulichkeit und Übersichtlichkeit ist bedeutend. Ferner erscheint es zweckmäßig, die Kurventheorie der hier gegebenen Darstellung insofern anzupassen, daß als Achsenkreuz in der Normalebene nicht mehr die Haupt- und Binormale benutzt werden; denn sie leiden an dem Übelstand, unbestimmt zu werden, wenn die Krümmung verschwindet.

Literatur.

1. A. Voss, Zur Theorie der ... Krümmung höherer Mannigfaltigkeiten, Math. Ann. **16** (1880), S. 129—178.

2. T. Levi-Civita, Nozione di parallelismo in una variatà qualunque ..., Rend. del Circ. Math. di Palermo **42** (1917).

3. H. Weyl, Raum Zeit Materie (4. Aufl., Springer 1921), Kap. II.

4. W. Blaschke, Frenets Formeln für den Raum von Riemann, Math. Zeitschr. **6** (1920), S. 94—99.

5. G. Juvet, Les formules de Frenet pour un espace de M. Weyl, Comptes rendus **172** (27. Juni 1921), S. 1647.

(Eingegangen am 27. August 1921.)